Lý thuyết Hàm suy rộng và Không gian Sobolev

Đặng Anh Tuấn

Hà Nội, ngày 20- 11- 2005

Chương 1

Các không gian hàm cơ bản và không gian hàm suy rộng

1.1 Một số kiến thức bổ sung

1.1.1 Một số ký hiệu

$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ là tập các số tự nhiên, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ là tập các số nguyên không âm, $\mathbb{R}$ là tập các số thực, $\mathbb{C}$ là tập các số phức. Đơn vị ảo $\sqrt{-1} = i$.
Với mỗi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, tập $\mathbb{Z}_+^n = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \big| \alpha_j \in \mathbb{Z}_+, j = 1, \ldots, n\}$, tập $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \big| x_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \ldots\}$ là không gian thực n chiều với chuẩn Euclid

$$\|x\| = \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Nếu không có gì đặc biệt, ký hiệu Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^n$.
Với mỗi $k \in \mathbb{Z}_+$ ký hiệu các tập như sau:

$$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C} \big| u \text{ khả vi liên tục đến cấp } k\}, C(\Omega) = C^0(\Omega) = \{u : \Omega \stackrel{\text{liên tục}}{\longrightarrow} \mathbb{C}\},$$
$$C_0^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C} \big| u \in C^k(\Omega), \operatorname{supp} u \text{ là tập compact}\}, C_0(\Omega) = C_0^0(\Omega),$$
$$C^\infty(\Omega) = \cap_{k=1}^\infty C^k(\Omega), C_0^\infty(\Omega) = \cap_{k=1}^\infty C_0^k(\Omega),$$

trong đó, $\operatorname{supp} u = cl\{x \in \Omega \big| u(x) \neq 0\}$.
Với mỗi số thực $1 \leq p < \infty$, ký hiệu

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \underset{\text{Lebesgue}}{\stackrel{\text{đđ}}{\longrightarrow}} \mathbb{C} \big| \int_\Omega |u(x)|^p < +\infty\},$$

với $p = \infty$, ký hiệu

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \underset{\text{Lebesgue}}{\stackrel{\text{đđ}}{\longrightarrow}} \mathbb{C} \big| ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < +\infty\},$$

trong đó, $ess\sup_{x\in\Omega}|u(x)| = \inf\{M > 0 \big| m\{x \in \Omega \big| |u(x)| > M\} = 0\}$.
Với $1 \leq p \leq \infty$, ký hiệu

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \underset{\text{Lebesgue}}{\overset{\text{đđ}}{\longrightarrow}} \mathbb{C} \big| u \in L^p(\omega), \text{ với mọi tập con đo được } \omega \subset\subset \Omega\}$$

$$L^p_{compact}(\Omega) = \{u : \Omega \underset{\text{Lebesgue}}{\overset{\text{đđ}}{\longrightarrow}} \mathbb{C} \big| u \in L^p(\Omega), \exists \omega \subset\subset \Omega : \ u(x) = 0 \text{ h.k.n. trong } \Omega \setminus \omega\},$$

trong đó, $\omega \subset\subset \Omega$ nghĩa là bao đóng $cl(\omega)$ là tập compact trong Ω.
Với mỗi hàm $u \in C^\infty(\Omega), \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ ký hiệu

$$D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} u, D_j^{\alpha_j} = \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}, j = 1, 2, \dots.$$

Khi đó, với $u, v \in C^\infty(\Omega), \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ có công thức Leibnitz

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v,$$

trong đó, $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{j=1}^n \binom{\alpha_j}{\beta_j}, \binom{\alpha_j}{\beta_j} = \frac{\alpha_j!}{\beta_j!(\alpha_j - \beta_j)!}, \sum\limits_{\beta \leq \alpha}$ là tổng lấy trên tập các đa chỉ số $\beta \in \mathbb{Z}^n_+$ mà $\beta \leq \alpha$, nghĩa là $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j, j = 1, 2, \dots, n$.

1.1.2 Phân hoạch đơn vị

Định nghĩa 1.1. Cho Ω là một tập trong $\mathbb{R}^n$. Một họ đếm được các cặp $\{(\Omega_j, \varphi_j)\}_{j=1}^\infty$, trong đó Ω_j là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, φ_j là hàm thuộc lớp các hàm khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}^n$, được gọi là một phân hoạch đơn vị của tập Ω nếu các tính chất sau được thoả mãn:

(i) $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$ là một phủ mở của $\Omega, (\Omega \subset \cup_{j=1}^\infty \Omega_j, \Omega_j$ là tập mở),

(ii) $0 \leq \varphi_j(x) \leq 1, \forall x \in \Omega, j = 1, 2, \dots,$

(iii) $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp} \varphi_j \subset \Omega_j, j = 1, 2, \dots,$

(iv) $\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x) = 1, \forall x \in \Omega.$

Ta còn gọi $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ là phân hoạch đơn vị ứng với phủ mở $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$ của tập Ω.

Định lý 1.1. *Cho K là một tập compact trong $\mathbb{R}^n$, họ hữu hạn $\{U_j\}_{j=1}^N$ là một phủ mở của K. Khi đó, tồn tại một họ hữu hạn các hàm khả vi vô hạn $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ xác định một phân hoạch đơn vị ứng với phủ mở $\{U_j\}_{j=1}^N$ của tập K.*

Để chứng minh định lý ta cần một số kết quả sau.
Từ đây trở đi, ký hiệu hàm $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm được xác định như sau

$$\rho(x) := \begin{cases} Ce^{\frac{1}{||x||^2-1}}, & \text{nếu} ||x|| < 1, \\ 0, & \text{nếu } ||x|| \geq 1, \end{cases}$$

trong đó, C là hằng số sao cho $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$.
Để ý rằng, hàm ρ có các tính chất sau

(i) $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp}\rho = \bar{B}_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \big| ||x|| \le 1\}, \rho(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}^n,$

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1, \rho$ là hàm chỉ phụ thuộc vào $||x||$(radial function).

Với mỗi $\epsilon > 0$, đặt $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\rho(\frac{x}{\epsilon})$. Hàm ρ_ϵ cũng có các tính chất của hàm ρ:

(i) $\rho_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp}\rho_\epsilon = \bar{B}_\epsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \big| ||x|| \le 1\}, \rho_\epsilon(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}^n,$

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(x)dx = 1, \rho_\epsilon$ là hàm chỉ phụ thuộc vào $||x||$(radial function).

Với mỗi hàm $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, đặt

$$f_\epsilon(x) = (f * \rho_\epsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\rho_\epsilon(x-y)dy.$$

Việc đặt này là có nghĩa vì

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\rho_\epsilon(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\rho_\epsilon(y)dy = \int_{\bar{B}_\epsilon(0)} f(x-y)\rho_\epsilon(y)dy.$$

Mệnh đề 1.2. *Cho $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Khi đó, ta có các kết luận sau.*

(i) $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Nếu $\operatorname{supp} f = K \subset\subset \mathbb{R}^n$ thì $f_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp} f_\epsilon \subset K_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \big| d(x,K) \le \epsilon\}$.

(iii) Nếu $f \in C(\mathbb{R}^n)$ thì $\lim\limits_{\epsilon \to 0_+} \sup\limits_{x \in K} |f_\epsilon(x) - f(x)| \to 0, \forall K \subset\subset \mathbb{R}^n$.

(iv) Nếu $f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 \le p < \infty)$ thì $f_\epsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$, và $f_\epsilon \xrightarrow{L^p} f$ khi $\epsilon \to 0_+$.

Chứng minh. (i) Dễ dàng chứng minh từ đẳng thức sau

$$D_x^\alpha\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\rho_\epsilon(x-y)dy\Big) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)D_x^\alpha\rho_\epsilon(x-y)dy.$$

(ii)Do $\operatorname{supp} f = K$ nên

$$f_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\rho_\epsilon(x-y)dy = \int_K f(y)\rho_\epsilon(x-y)dy.$$

Khi đó, với mỗi $x \notin K_\epsilon$, nghĩa là $d(x,K) > \epsilon$ hay $||x-y|| > \epsilon, \forall y \in K$. Mà $\operatorname{supp}\rho_\epsilon \in \bar{B}_\epsilon(0)$ nên $\rho_\epsilon(x-y) = 0, \forall y \in K$. Do đó, $f_\epsilon(x) = 0$ khi $x \notin K_\epsilon$ hay $\operatorname{supp} f_\epsilon \subset K_\epsilon$.
(iii) Dễ thấy

$$f_\epsilon(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x-\epsilon y) - f(x)\big)\rho(y)dy = \int_{\bar{B}_1(0)} \big(f(x-\epsilon y) - f(x)\big)\rho(y)dy$$

nên $|f_\epsilon(x) - f(x)| \le \sup\limits_{y \in \bar{B}_\epsilon(0)} |f_\epsilon(x-y) - f(x)|$
mà $f \in C(\mathbb{R}^n)$ có f liên tục đều trên từng tập compact $K \subset \mathbb{R}^n$
do đó $\lim\limits_{\epsilon \to 0_+} \sup\limits_{x \in K} |f_\epsilon(x) - f(x)| \to 0, \forall K \subset\subset \mathbb{R}^n$.

$\square$

Mệnh đề 1.3. *Cho* $K \subset\subset \mathbb{R}^n$*. Khi đó, với mỗi* $\epsilon > 0$*, có một hàm* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *thoả mãn*

(i) $0 \leq \varphi(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $\operatorname{supp} \varphi \subset K_\epsilon$,

(iii) $\varphi(x) = 1, \forall x \in K_{\frac{\epsilon}{2}}$.

Chứng minh. Lấy hàm đặc trưng của tập $K_{\frac{3\epsilon}{4}}$

$$\chi(x) := \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \in K_{\frac{3\epsilon}{4}}, \\ 0, & \text{nếu } x \notin K_{\frac{3\epsilon}{4}}. \end{cases}$$

Có $\chi \in L^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp} \chi = K_{\frac{3\epsilon}{4}}$, nên theo Mệnh đề 1.2 có

(i) $\chi * \rho_{\frac{\epsilon}{4}} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

(ii) $\operatorname{supp}(\chi * \rho_{\frac{\epsilon}{4}}) \subset K_\epsilon$,

(iii)$0 \leq (\chi * \rho_{\frac{\epsilon}{4}})(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Để ý rằng,

$$(\chi * \rho_{\frac{\epsilon}{4}})(x) = \int_{\bar{B}_{\frac{\epsilon}{4}}(0)} \chi(x-y)\rho_{\frac{\epsilon}{4}}(y)dy$$

nên

(i) $(\chi * \rho_{\frac{\epsilon}{4}})(x) \leq \int_{\bar{B}_{\frac{\epsilon}{4}}(0)} \rho_{\frac{\epsilon}{4}}(y)dy = 1$,

(ii) Nếu $x \in K_{\frac{\epsilon}{2}}$ thì $(x-y) \in K_{\frac{3\epsilon}{4}}, \forall y \in \bar{B}_{\frac{\epsilon}{4}}$, do đó $(\chi * \rho_{\frac{\epsilon}{4}})(x) = \int_{\bar{B}_{\frac{\epsilon}{4}}(0)} \rho_{\frac{\epsilon}{4}}(y)dy = 1$.

□

Chứng minh. Chứng minh Định lý 1.1. Từ giả thiết K là tập compact, $\{U_j\}_{j=1}^N$ là một phủ mở của K có

$$W_1 := K \backslash (\cup_{j=2}^N U_j) \subset\subset U_1$$

nên tồn tại $\epsilon_1 > 0$ sao cho

$$W_1 \subset W_1 + B_{\epsilon_1}(0) \subset U_1.$$

Theo Mệnh đề 1.3 có một hàm nhận giá trị trong khoảng $(0,1)$ là $\psi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sao cho

$$V_1 := W_1 + B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(0) \subset \operatorname{supp} \psi_1 \subset W_1 + B_{\epsilon_1} \subset U_1.$$

Lại có, $W_1 := K \backslash (\cup_{j=2}^N U_j) \subset V_1$ mà V_1 là tập mở nên

$$W_2 := K \backslash (V_1 \cup (\cup_{j=3}^N U_j)) \subset\subset U_2.$$

Do đó, tồn tại $\epsilon_2 > 0$ sao cho

$$W_2 \subset W_2 + B_{\epsilon_2}(0) \subset U_2.$$

Theo Mệnh đề 1.3, có một hàm nhận giá trị trong khoảng $(0, 1)$ là $\psi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sao cho

$$V_2 := W_2 + B_{\frac{\epsilon_2}{2}}(0) \subset \operatorname{supp} \psi_2 \subset W_2 + B_{\epsilon_2} \subset U_2.$$

Cứ như thế ta xây dựng được dãy các hàm $\{\psi_j\}_{j=1}^N$ thoả mãn

(i) $\psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

(ii) $V_j := W_j + B_{\frac{\epsilon_j}{2}}(0) \subset \operatorname{supp} \psi_j \subset W_j + B_{\epsilon_j} \subset U_j$,

(iii) $\sum_{j=1}^N \psi_j(x) > 0, \forall x \in \cup_{j=1}^N V_j (\supset K)$,

(iv) $\sum_{j=1}^N \psi_j(x) < N + 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Có $K \subset\subset \cup_{j=1}^N V_j$ nên tồn tại một số $\epsilon > 0$ sao cho

$$K \subset K + B_\epsilon(0) \subset \cup_{j=1}^N V_j.$$

Theo Mệnh đề 1.3 có một hàm không âm ϕ thoả mãn

(i) $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

(ii) $K \subset K + B_{\frac{\epsilon}{2}}(0) \subset \operatorname{supp} \phi \subset K + B_\epsilon \subset \cup_{j=1}^N V_j$,

(iii)$0 \le \phi(x) \le 1, \forall x \in \mathbb{R}^n, \phi(x) = 1, \forall x \in K + B_\epsilon(0)$.

Đặt

$$\varphi_j(x) := \frac{\psi_j(x)}{\phi(x)\Big(\sum_{k=1}^N \psi_k(x)\Big) + (1 - \phi(x))\Big(N + 1 - \sum_{k=1}^N \psi_k(x)\Big)}$$

có

(i) $0 \le \varphi_j(x) \le 1, \forall x \in K, j = 1, 2, \dots,$

(ii) $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp} \varphi_j \subset U_j, j = 1, 2, \dots,$

(iii) $\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x) = 1, \forall x \in K$.

$\square$

Chú ý. Để xây dựng các hàm φ_j từ ψ_j ta có thể dùng một trong hai cách sau:

(i) thứ nhất

$$\varphi_j(x) := \begin{cases} \frac{\phi(x)\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^N \psi_k(x)}, & \text{nếu } x \in \operatorname{supp} \phi, \\ 0, & \text{nếu } x \notin \operatorname{supp} \phi, \end{cases}$$

(ii) thứ hai

$$\varphi_1(x) = \psi_1(x), \varphi_2(x) = (1 - \psi_1(x))\psi_2(x), \dots, \varphi_N(x) = \psi_N(x) \prod_{j=1}^{N-1} (1 - \psi_j(x)).$$

1.2 Không gian hàm cơ bản $\mathcal{D}(\Omega)$, không gian hàm suy rộng $\mathcal{D}'(\Omega)$

1.2.1 Không gian hàm cơ bản $\mathcal{D}(\Omega)$

Định nghĩa 1.2. Không gian $\mathcal{D}(\Omega)$ là không gian gồm các hàm $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ với khái niệm hội tụ sau: dãy $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ các hàm trong $C_0^\infty(\Omega)$ được gọi là hội tụ đến hàm $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ nếu

(i) có một tập compact $K \subset \Omega$ mà $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K, j = 1, 2, \dots,$

(ii) $\lim\limits_{j\to\infty} \sup\limits_{x\in\Omega} |D^\alpha \varphi_j(x) - D^\alpha \varphi(x)| = 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Khi đó, ta viết là $\varphi = \mathcal{D}_-\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j$.

Chú ý. 1.Nếu $\varphi = \mathcal{D}_-\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j$ thì $\operatorname{supp}\varphi \subset K$.
2. Khái niệm hội tụ trên $\mathcal{D}(\Omega)$ là phù hợp với cấu trúc tuyến tính trên $\mathcal{D}(\Omega)$, nghĩa là, nếu $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \varphi_k, \psi_k, \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), k = 1, 2, \dots,$ có

$$\text{nếu } \mathcal{D}_-\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi, \mathcal{D}_-\lim_{k\to\infty} \psi_k = \psi \text{ thì } \mathcal{D}_-\lim_{k\to\infty} (\lambda\varphi_k + \mu\psi_k) = \lambda\varphi + \mu\psi.$$

3. Hơn thế, ta còn có thể chứng minh nếu $\phi \in C^\infty(\Omega)$, và $\varphi = \mathcal{D}_-\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j$ thì $\phi\varphi = \mathcal{D}_-\lim\limits_{j\to\infty} \phi\varphi_j$. Thật vậy, do nếu $\varphi_k(x) = 0$ thì $\phi(x)\varphi_k(x) = 0$ nên $\operatorname{supp}(\phi\varphi_k) \subset \operatorname{supp}\varphi_k$, và theo công thức Leibnitz có với mỗi $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$D^\alpha(\phi\varphi_k)(x) = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta\phi(x) D^{\alpha-\beta}\varphi_k(x)$$

mà $\varphi = \mathcal{D}_-\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j$ nghĩa là

(i) có một tập compact $K \subset \Omega$ mà $\operatorname{supp}\varphi_k \subset K, k = 1, 2, \dots,$

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in\Omega} |D^\alpha \varphi_k(x) - D^\alpha \varphi(x)| = 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$,

do đó,

(i) $\operatorname{supp}(D^\alpha\varphi_k) \subset K, k = 1, 2, \dots, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ nên

$$\operatorname{supp}(\phi\varphi_k) \subset K, \operatorname{supp}(D^\alpha(\phi\varphi_k)) \subset K, k = 1, 2, \dots,$$

(ii) $\sup\limits_{x\in\Omega} |D^\alpha(\phi\varphi_k)(x) - D^\alpha(\phi\varphi)(x)| \le C\Big(\sum\limits_{\beta\le\alpha} \sup\limits_{x\in K} |D^\beta\phi(x)|\Big) \sup\limits_{\substack{x\in\Omega \\ \beta\le\alpha}} |D^\beta\varphi_k(x) - D^\beta\varphi(x)|$

nên

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha(\phi\varphi_k)(x) - D^\alpha(\phi\varphi)(x)| = 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Với mỗi $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, phép toán đạo hàm D^α là ánh xạ tuyến tính liên tục trong $\mathcal{D}(\Omega)$, nghĩa là

(i) $D^\alpha\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \operatorname{supp} D^\alpha\varphi \subset \operatorname{supp}\varphi$,

(ii) nếu $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ thì $D^\alpha(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda D^\alpha\varphi + \mu D^\alpha\psi$,

(iii) nếu $\mathcal{D}\_\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0$ thì $\mathcal{D}\_\lim\limits_{k\to\infty} D^\alpha\varphi_k = 0$.

Như vậy, toán tử vi phân tuyến tính $P = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha, a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ là toán tử vi phân tuyến tính liên tục trên $\mathcal{D}(\Omega)$ mà $\operatorname{supp} Pu \subset \operatorname{supp} u, \forall u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Peetre, J. đã chứng minh được rằng nếu toán tử tuyến tính P trên $C_0^\infty(\Omega)$ thoả mãn tính chất $\operatorname{supp} Pu \subset \operatorname{supp} u, \forall u \in C_0^\infty(\Omega)$ thì P là toán tử vi phân.

4. Dãy $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ được gọi là một dãy Cauchy trong $\mathcal{D}(\Omega)$ nếu

(i) có một tập compact $K \subset \mathbb{R}^n$ mà $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K, j = 1, 2, \ldots,$

(ii) $\lim\limits_{\substack{j\to\infty\\k\to\infty}} \sup\limits_{x\in K} |D^\alpha\varphi_j(x) - D^\alpha\varphi_k(x)| = 0, \forall\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

5. Cho $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega), k = 1, 2, \ldots,$ chuỗi hình thức $\sum_{k=1}^\infty \varphi_k$ được gọi là hội tụ trong $\mathcal{D}(\Omega)$ nếu dãy các tổng riêng $\{\sum_{j=1}^k \varphi_j\}_{k=1}^\infty$ hội tụ trong $\mathcal{D}(\Omega)$.

Mệnh đề 1.4. *Không gian $\mathcal{D}(\Omega)$ là đủ.*

Chứng minh. Lấy dãy $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ là một dãy Cauchy trong $\mathcal{D}(\Omega)$ thì

(i) có một tập compact $K \subset \Omega$ mà $\operatorname{supp} D^\alpha\varphi_j \subset K, j = 1, 2, \ldots, \forall\alpha,$

(ii) $\lim\limits_{\substack{j\to\infty\\k\to\infty}} \sup\limits_{x\in K} |D^\alpha\varphi_j(x) - D^\alpha\varphi_k(x)| = 0, \forall\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

nên với mỗi α dãy $\{D^\alpha\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong không gian $C(K)$ với chuẩn $\sup$, mà không gian $C(K)$ với chuẩn $\sup$ là không gian đủ, do đó có một hàm $\varphi^\alpha \in C(\Omega)$ sao cho

(i) $\operatorname{supp}\varphi^\alpha \subset K$,

(ii) $\lim\limits_{j\to\infty} \sup\limits_{x\in K} |D^\alpha\varphi_j(x) - \varphi^\alpha(x)| = 0$.

Ta sẽ chứng minh $\varphi^\alpha = D^\alpha\varphi^0$. Khi đó, $\varphi^0 \in C_0^\infty(\Omega)$ và

(i) $\operatorname{supp} D^\alpha\varphi^0 \subset K$,

(ii) $\lim\limits_{j\to\infty} \sup\limits_{x\in\Omega} |D^\alpha\varphi_j(x) - D^\alpha\varphi^0(x)| = \lim\limits_{j\to\infty} \sup\limits_{x\in K} |D^\alpha\varphi_j(x) - D^\alpha\varphi^0(x)| = 0$.

hay $\varphi^0 = \mathcal{D}\_\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j$.

Để chứng minh điều này ta chỉ cần chứng minh khi $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$. Các trường hợp $\alpha = (0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{j}, 0, \ldots, 0)$ ta chứng minh tương tự. Sau đó, bằng qui nạp ta chứng minh cho các trường hợp còn lại.

Điều này là hiển nhiên vì $D_1\varphi_j$ hội tụ đều đến $\varphi^{(1,0,\ldots,0)}$ trong K, và φ_j hội tụ đều đến φ^0 trong K. $\square$

1.2.2 Không gian hàm suy rộng $\mathcal{D}'(\Omega)$

Định nghĩa 1.3. Ta nói rằng f là một hàm suy rộng trong Ω nếu f là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{D}(\Omega)$.
Hàm suy rộng $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tác động lên mỗi $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ được viết là $\langle f, \varphi \rangle$. Hai hàm suy rộng $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ được gọi là bằng nhau nếu

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tập tất cả các hàm suy rộng trong Ω lập thành không gian $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Chú ý. Trên $\mathcal{D}'(\Omega)$ có thể xây dựng một cấu trúc không gian vectơ trên $\mathbb{C}$, nghĩa là ta có thể định nghĩa các phép toán tuyến tính như sau

(i) phép cộng: với $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tổng $f + g$ được xác định như sau

$$f + g : \varphi \mapsto \langle f + g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

khi đó, $f + g \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nghĩa là, $f + g$ là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{D}(\Omega)$,

(ii) phép nhân với số phức: với $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tích λf được xác định như sau

$$\lambda f : \varphi \mapsto \langle \lambda f, \varphi \rangle = \lambda \langle f, \varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

khi đó, $\lambda f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nghĩa là, λf là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{D}(\Omega)$.

Hơn thế, ta còn có thể định nghĩa phép nhân với một hàm trong $C^\infty(\Omega)$.
Với $\phi \in C^\infty(\Omega)$, $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tích $\phi f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ được xác định như sau

$$\phi f : \varphi \mapsto \langle \phi f, \varphi \rangle = \langle f, \phi \varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

khi đó, $\phi f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
Thật vậy, do $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ nên dễ thấy $\phi f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ là ánh xạ tuyến tính.
Để chứng minh ϕf liên tục ta lấy dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ mà $\mathcal{D}_- \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0$ ta chứng minh $\lim\limits_{k\to\infty} \langle \phi f, \varphi_k \rangle = \lim\limits_{k\to\infty} \langle f, \phi \varphi_k \rangle = 0$. Điều này là hiển nhiên vì f liên tục và $\mathcal{D}_- \lim\limits_{k\to\infty} \phi \varphi_k = 0$.

Ví dụ 1. Với mỗi $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ được coi là một hàm suy rộng bằng cách sau

$$f : \varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Như vậy, có thể coi $L^1_{loc}(\Omega)$ là tập con của $\mathcal{D}'(\Omega)$. Hàm suy rộng $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ được gọi là hàm suy rộng chính quy.
Với $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$, thì sự bằng nhau theo nghĩa hàm suy rộng và theo nghĩa thông thường là như nhau, nghĩa là

$$f, g \in L^1_{loc}(\Omega), \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega g(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ thì } f = g, h.k.n \text{ trong } \Omega.$$

Ví dụ 2. Hàm Dirac:

$$\delta : \varphi \mapsto \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.2.3 Đạo hàm suy rộng

Trong trường hợp một biến, áp dụng công thức tích phân từng phần cho $f \in C^1(\mathbb{R}), \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = (-1)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Như vậy, ta có thể định nghĩa đạo hàm của một hàm như một hàm suy rộng. Ngoài ra, bằng cách định nghĩa như vậy ta có thể định nghĩa đạo hàm cho hàm $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Định nghĩa 1.4. Cho $f \in \mathcal{D}'(\Omega), \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$. Đạo hàm suy rộng cấp α của hàm suy rộng f trong Ω, ký hiệu là $D^\alpha f$, là ánh xạ từ $\mathcal{D}(\Omega)$ vào $\mathbb{C}$ được xác định bởi

$$D^\alpha f : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|}\langle f, D^\alpha \varphi\rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Chú ý. Với mỗi $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+, f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, đạo hàm suy rộng cấp α của hàm suy rộng f trong Ω là một hàm suy rộng, nói cách khác, đạo hàm suy rộng $D^\alpha f$ là phiếm hàm tuyến tính liên tục từ $\mathcal{D}(\Omega)$ vào $\mathbb{C}$, vì

- với mỗi $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ có

$$\begin{aligned}\langle D^\alpha f, \lambda\varphi + \mu\psi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle f, D^\alpha(\lambda\varphi + \mu\psi)\rangle = (-1)^{|\alpha|}(\lambda\langle f, D^\alpha\varphi\rangle + \mu\langle f, D^\alpha\psi\rangle)\\ &= \lambda\langle D^\alpha f, \varphi\rangle + \mu\langle D^\alpha f, \psi\rangle\end{aligned}$$

- với $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega), k = 1, 2, \ldots, \mathcal{D}_-\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k = 0$ thì $\mathcal{D}_-\lim\limits_{k\to\infty} D^\alpha\varphi_k = 0, \alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ nên

$$\lim_{k\to\infty}\langle D^\alpha f, \varphi_k\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle f, D^\alpha\varphi_k\rangle = 0.$$

Với mỗi $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+, f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ có đạo hàm suy rộng cấp $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ là $D^\alpha f, D^\beta f, D^{\alpha+\beta} f$ và

$$D^{\alpha+\beta} f = D^\alpha(D^\beta f) = D^\beta(D^\alpha f).$$

Do đó, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\ldots D_n^{\alpha_n}$, với $D_j^{\alpha_j} = \underbrace{D^{(0,\ldots,0,\overbrace{1}^{j},0,\ldots,0)}\ldots D^{(0,\ldots,0,\overbrace{1}^{j},0,\ldots,0)}}_{\alpha_j \text{ lần}}$, và thứ tự có thể thay đổi.

Ví dụ 3. Nếu $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ có đạo hàm cấp α theo nghĩa thông thường $D^\alpha f \in L^1_{loc}(\Omega)$ thì đạo hàm theo nghĩa suy rộng của hàm suy rộng f cũng là $D^\alpha f$.

Ví dụ 4. Hàm Heaviside

$$\theta(t) := \begin{cases} 1, & \text{nếu } t > 0,\\ 0, & \text{nếu } t \le 0.\end{cases}$$

có đạo hàm suy rộng $D\theta(t) = \delta(t)$.

Ví dụ 5. Cho $f \in \mathcal{D}'(\Omega), \varphi \in C^\infty(\Omega)$ có

$$D^\alpha(\varphi f) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta} f, \text{trong đó } \binom{\alpha}{\beta} = \prod_{j=1}^n \binom{\alpha_j}{\beta_j}, \binom{\alpha_j}{\beta_j} = \frac{\alpha_j!}{\beta_j!(\alpha_j-\beta_j)!}.$$

Ví dụ 6. Đặt $E(x) = (2\pi)^{-1} \ln ||x||$, nếu $x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, còn với $n \ge 3$ đặt

$$E(x) = -\frac{1}{(n-2)c_n} ||x||^{2-n}, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},$$

với c_n là diện tích mặt cầu đơn vị trong trong gian $\mathbb{R}^n$.
Khi đó, $\Delta E = \delta$ trong $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \Delta = D_1^2 + \ldots D_n^2$.
Thật vậy, trước hết ta chứng minh $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dễ dàng thấy E khả vi vô hạn tại mọi điểm $x \neq 0$, và với $x \neq 0$ có

$$D_j E(x) = \frac{1}{c_n} x_j ||x||^{-n}, D_j^2 E(x) = \frac{1}{c_n}(||x||^2 - n x_j^2)||x||^{-n} \text{ chú ý } c_2 = 2\pi$$
$$\Delta E(x) = D_1^2 E(x) + \ldots D_n^2 E(x) = 0.$$

Như vậy để chứng minh $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ta chỉ cần chứng minh E khả tích trong hình cầu đơn vị $B_1(0)$. Bằng cách chuyển sang hệ toạ độ cầu ta có

$$\int_{B_1(0)} E(x)dx = \begin{cases} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{c_2} \ln(r) r dr d\theta & \text{nếu } n = 2, \\ -\int_{||x||=1} \int_0^1 \frac{1}{(n-2)c_n} r^{2-n} r^{n-1} dr dS & \text{nếu } n \ge 3, \end{cases}$$

hay

$$\int_{B_1(0)} E(x)dx = \begin{cases} \int_0^1 \ln(r) r dr = \frac{r^2 \ln r}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{r}{2} dr = \frac{-1}{4} & \text{nếu } n = 2, \\ -\int_0^1 \frac{1}{(n-2)} r dr = \frac{-1}{2(n-2)} & \text{nếu } n \ge 3. \end{cases}$$

Với $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ có một số $R > 0$ để $\operatorname{supp} \varphi \in B_R(0)$, khi đó, theo công thức Gauss cho hình $\{\epsilon \le ||x|| \le R\}$ với hai biên $\{\epsilon = ||x||\}, \{||x|| = R\}$

$$\begin{aligned} \langle D_j E, \varphi \rangle &= -\langle E, D_j \varphi \rangle = -\lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{\epsilon \le ||x|| \le R} E(x) D_j \varphi(x) dx \\ &= \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{\epsilon \le ||x|| \le R} \frac{1}{c_n} x_j ||x||^{-n} \varphi(x) dx + \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{\epsilon = ||x||} E(x)\varphi(x) \frac{x_j}{||x||} dS \\ &\quad - \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{||x|| = R} E(x) \varphi(x) \frac{x_j}{||x||} dS \end{aligned}$$

mà $\varphi(x) = 0, ||x|| \ge R$, và trên biên $\{\epsilon = ||x||\}$ thì $|E(x)\varphi(x)\frac{x_j}{||x||}|$ là vô cùng bé $O(\ln(\frac{1}{\epsilon}))$ nếu $n = 2$ và $O(\epsilon^{2-n})$ nếu $n \ge 3$ nên $\int_{\epsilon=||x||} E(x)\varphi(x)\frac{x_j}{||x||} dS$ là vô cùng bé $O(\epsilon \ln(\frac{1}{\epsilon}))$ nếu $n = 2$ và $O(\epsilon)$ nếu $n \ge 3$ khi $\epsilon \to 0_+$ nên

$$\langle D_j E, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{\epsilon \le ||x|| \le R} \frac{1}{c_n} x_j ||x||^{-n} \varphi(x) dx.$$

nên đạo hàm suy rộng D_jE có thể viết dưới dạng một hàm khả tích địa phương

$$D_jE(x) = \frac{1}{c_n} x_j ||x||^{-n}.$$

Lại có

$$\begin{aligned}
\langle D_j^2 E, \varphi \rangle = -\langle D_j E, D_j \varphi \rangle &= -\lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{\epsilon \le ||x|| \le R} D_j E(x) D_j \varphi(x) dx \\
&= \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{\epsilon \le ||x|| \le R} \frac{1}{c_n} (||x||^2 - n x_j^2) ||x||^{-n} \varphi(x) dx \\
&\quad - \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{||x|| = R} D_j E(x) \varphi(x) \frac{x_j}{||x||} dS \\
&\quad + \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{||x|| = \epsilon} \varphi(x) \frac{x_j^2}{c_n ||x||^{n+1}} dS
\end{aligned}$$

mà $\varphi(x) = 0, ||x|| \geq R$ nên

$$\langle \Delta E, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0_+} \frac{1}{c_n \epsilon^{n-1}} \int_{||x|| = \epsilon} \varphi(x) dS = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

hay $\Delta E = \delta$.

Ví dụ 7. Trong $\mathbb{R}^{n+1}$, ký hiệu $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ và

$$E(x,t) = (4\pi t)^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{||x||^2}{4t}}, t > 0, \ , \ E(x,t) = 0, t \leq 0.$$

Khi đó, $E \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$, và

$$(D_t - \Delta_x) u = \delta.$$

Ví dụ 8. Trong $\mathbb{R}^2$, ký hiệu $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ và

$$E_1(x,t) = \frac{1}{2} \theta(t - |x|).$$

Khi đó, $(D_t^2 - D_x^2) E_1(x,t) = \delta$.
Trong $\mathbb{R}^3$, ký hiệu $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ và

$$E_2(x,t) = \frac{\theta(t - ||x||)}{2\pi \sqrt{t^2 - ||x||^2}}, t \neq ||x|| \ , \ E(x,t) = 0, t = ||x||.$$

Khi đó, $(D_t^2 - \Delta_x) E_2(x,t) = \delta$.
Trong $\mathbb{R}^4$, ký hiệu $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ và

$$E_3(x,t) = \frac{1}{2\pi} \theta(t) \delta(t^2 - ||x||^2).$$

Khi đó, $(D_t^2 - \Delta_x) E_3(x,t) = \delta$.

Trong trường hợp $\Omega = \mathbb{R}$, với $f, F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ta nói F là nguyên hàm suy rộng của hàm suy rộng f nếu đạo hàm suy rộng của F là f, nghĩa là $DF = f$.

Mệnh đề 1.5. *Mọi hàm suy rộng $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ đều có nguyên hàm suy rộng.*

Chứng minh. Với mỗi $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ đặt

$$\psi(x) = \varphi(x) - \rho(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt$$
$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)dt.$$

Có $\Psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ nên với mỗi hàm suy rộng $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,ta có thể đặt

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle f, \Psi \rangle.$$

Khi đó, $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ và

$$\langle DF, \varphi \rangle = \langle F, \varphi' \rangle = \langle f, \varphi(x) - \int_{-\infty}^{x} \rho(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t)dtdy \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

Nếu hàm suy rộng F có đạo hàm suy rộng $DF = 0$ thì

$$\begin{aligned}\langle F, \varphi \rangle &= \langle F, \psi \rangle + \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt \Big) \langle F, \rho \rangle \\ &= \langle DF, \Psi \rangle + \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt \Big) \langle F, \rho \rangle \\ &= \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt \Big) \langle F, \rho \rangle.\end{aligned}$$

Do đó, nếu hàm suy rộng F có nguyên hàm suy rộng $DF = 0$ thì F tương ứng với hàm hằng $F \equiv \langle F, \rho \rangle$ trong lớp hàm khả tích địa phương $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
Khi đó, với mỗi hàm suy rộng $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, luôn có một họ các nguyên hàm suy rộng mà hai nguyên hàm trong họ sai khác nhau một hàm suy rộng có thể biểu diễn dưới dạng hàm khả tích địa phương hằng. □

1.2.4 Cấp của hàm suy rộng

Định nghĩa 1.5. Cho $K \subset \Omega, f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Ta nói hàm suy rộng f có cấp hữu hạn trên K nếu có một số nguyên không âm k và một số dương C sao cho

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{supp} \varphi \subset K. \tag{1.1}$$

Số nguyên không âm k nhỏ nhất trong các số nguyên không âm mà ta có bất đẳng thức (1.1) được gọi là cấp của hàm suy rộng f trên tập K.
Nếu không có một số nguyên không âm k nào để có (1.1) với số dương C nào đó, thì ta nói rằng, hàm suy rộng f có cấp vô hạn trên tập K.
Để đơn giản, ta nói rằng, hàm suy rộng $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ có cấp k nếu nó có cấp k trên Ω.

Ví dụ 9. Mọi hàm suy rộng $f \in L^1(\Omega)$ đều có cấp 0.

Ví dụ 10. Trên $\mathbb{R}^n$, hàm Dirac $\delta(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ có cấp 0. Với $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, đạo hàm suy rộng cấp α của hàm Dirac $D^\alpha\delta$ có cấp $|\alpha|$. Thật vậy, chọn $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sao cho $\phi(0) = 1, \operatorname{supp}\phi \subset B_1(0)$. Đặt $\phi_\epsilon(x) = x^\alpha\phi(\frac{x}{\epsilon})$ có

$$\langle D^\alpha\delta, \phi_\epsilon\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle\delta, D^\alpha\phi_\epsilon\rangle = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha(x^\alpha\phi(\frac{x}{\epsilon}))(0) = (-1)^{|\alpha|}\alpha!.$$

Lại có do nếu $||x|| \geq \epsilon$ thì $\phi_\epsilon(x) = 0$ nên

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|D^\beta\phi_\epsilon(x)| \leq C\epsilon^{|\alpha-\beta|} \to 0 \text{ khi } \epsilon \to 0, \beta < \alpha,$$

do đó với số nguyên không âm $k < |\alpha|$, với bất kỳ số $c > 0$ ta đều tìm được số $\epsilon > 0$ để

$$|\langle D^\alpha\delta, \phi_\epsilon\rangle| = \alpha! > c\sum_{|\beta|\leq k}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|D^\beta\phi_\epsilon(x)|,$$

còn với $k = |\alpha|$ thì

$$|\langle D^\alpha\delta, \varphi\rangle| = |D^\alpha\varphi(0)| \leq C\sum_{|\beta|\leq k}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|D^\beta\varphi(x)|, \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Ví dụ 11. Trên $\mathbb{R}$, hàm suy rộng được xác định như sau

$$\langle f, \varphi\rangle = \sum_{j=0}^{+\infty}\varphi^{(j)}(j)$$

có cấp vô hạn.

Thật vậy, chọn $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mà $\phi(x) = 1, x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \operatorname{supp}\phi \subset (-1, 1)$. Đặt $\phi_j(x) = (x-j)^j\phi(\frac{x-j}{\epsilon_j}), \epsilon_j$ chọn sau. Có $D^k\phi_j(k) = 0, k \neq j$, và $D^j\phi_j(j) = j!$ nên $\langle f, \phi_j\rangle = j!$. Nhưng, do nếu $|x-j| \geq \epsilon_j$ thì $\phi_j(x) = 0$ nên

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|D^k\phi_j(x)| \leq c\epsilon_j^{j-k}, k < j,$$

ta chọn $\epsilon_j > 0$ sao cho

$$|\langle f, \phi_j\rangle| = j! > j\sum_{k=1}^{j-1}\sup_{x\in\mathbb{R}}|D^k\phi_j(x)|.$$

Do đó, với mỗi $k > 0, c > 0$ chọn $j = \max\{k+1, c+1\}$ có

$$|\langle f, \phi_j\rangle| = j! > j\sum_{l=1}^{j-1}\sup_{x\in\mathbb{R}}|D^l\phi_j(x)| > c\sum_{l=1}^{k}\sup_{x\in\mathbb{R}}|D^k\phi_j(x)|$$

hay cấp của f là vô hạn.

Định lý 1.6. *Mỗi phiếm hàm tuyến tính f trên $\mathcal{D}(\Omega)$ là một hàm suy rộng khi và chỉ khi, trên mỗi tập compact $K \subset \Omega$, có một số nguyên không âm k và một số dương C sao cho*

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha \varphi(x)| = C\|\varphi\|_{C^k(\Omega)}, \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{supp}\varphi \subset K.$$

Chứng minh. Để chứng minh điều kiện đủ ta chỉ cần chứng minh tính liên tục của f tại gốc, nghĩa là nếu có một dãy $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ trong $C_0^\infty(\Omega)$ mà $\mathcal{D}\_\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j = 0$ thì $\lim\limits_{j\to\infty}\langle f, \varphi_j\rangle = 0$. Điều này là dễ thấy từ giả thiết.
Để chứng minh điều kiện cần ta dùng phản chứng, nghĩa là giả sử có một tập compact $K \subset \Omega$ với mỗi $k \in \mathbb{Z}_+$ ta đều có

$$\sup_{\substack{\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\\ \operatorname{supp}\varphi\subset K, \varphi\neq 0}} \frac{|\langle f, \varphi\rangle|}{\|\varphi\|_{C^k(\Omega)}} = +\infty$$

do đó, tồn tại $\varphi_k \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{supp}\varphi \subset K, \|\varphi_k\|_{C^k(\Omega)} > 0$ sao cho $|\langle f, \varphi_k\rangle| > k\|\varphi_k\|_{C^k(\Omega)}$. Chọn $\psi_k(x) = \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}\|\varphi_k\|_{C^k(\Omega)}}\varphi_k(x)$ có

- $\psi_k \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{supp}\psi_k \subset K$,
- $\mathcal{D}\_\lim\limits_{k\to\infty} \psi_k = 0, |\langle f, \psi_k\rangle| \geq k^{\frac{1}{2}}$,

nên $f \notin \mathcal{D}'(\Omega)$, trái với giả thiết.
Như vậy, điều giả sử sai hay ta có điều phải chứng minh. □

1.2.5 Sự hội tụ trong không gian hàm suy rộng $\mathcal{D}'(\Omega)$

Định nghĩa 1.6. Cho $f_k, f \in \mathcal{D}'(\Omega), k = 1, 2, \ldots$. Ta nói rằng, dãy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ hội tụ đến f trong $\mathcal{D}'(\Omega)$ khi k tiến ra vô cùng nếu

$$\lim_{k\to\infty}\langle f_k, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle, \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Khi đó, ta viết $\mathcal{D}'\_\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$.

Ví dụ 12. $\mathcal{D}'\_\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{\frac{1}{k}} = \delta$.
Thât vậy, với mỗi $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ có

$$\begin{aligned} |\langle \rho_{\frac{1}{k}}, \varphi\rangle - \varphi(0)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_{\frac{1}{k}}(y)|\varphi(y) - \varphi(0)|dy = \int_{B_{\frac{1}{k}}(0)} \rho_{\frac{1}{k}}(y)|\varphi(y) - \varphi(0)|dy \\ &\leq \sup_{y\in B_{\frac{1}{k}}(0)} |\varphi(y) - \varphi(0)| \end{aligned}$$

nên $\lim\limits_{k\to\infty} |\langle \rho_{\frac{1}{k}}, \varphi\rangle - \varphi(0)| = 0$ hay ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 13. Sự hội tụ trong $\mathcal{D}'(\Omega)$ trùng với sự hội tụ yếu và trong $L^1_{loc}(\Omega)$, nghĩa là nếu $f_k, f \in L^1_{loc}(\Omega), \mathcal{D}'_{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$, thì

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Chú ý. 1. Khái niệm hội tụ được định nghĩa ở trên là phù hợp với cấu trúc tuyến tính trên $\mathcal{D}'(\Omega)$, nghĩa là với $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, f_k, g_k, f, g \in \mathcal{D}'(\Omega), k = 1, 2, \ldots$ và

$$\mathcal{D}'_{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f, \mathcal{D}'_{-}\lim_{k\to\infty} g_k = g$$

thì

$$\mathcal{D}'_{-}\lim_{k\to\infty}(\lambda f_k + \mu g_k) = \lambda f + \mu g.$$

2. Cho $a(.) \in C^\infty(\Omega)$ phép toán nhân với $a(.)$ biến $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ thành $af \in \mathcal{D}'(\Omega)$ là ánh xạ tuyến tính liên tục, nghĩa là

(i) $a(\lambda f + \mu g) = \lambda af + \mu ag, \forall\lambda, \mu \in \mathbb{C}, f, g \in D'(\Omega)$,

(ii) Nếu $f_k, f \in \mathcal{D}'(\Omega), k = 1, 2, \ldots$ và $\mathcal{D}'_{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ thì $\mathcal{D}'_{-}\lim\limits_{k\to\infty} af_k = af$.

3. Với mỗi $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, phép toán đạo hàm suy rộng D^α cũng là ánh xạ tuyến tính liên tục trong $\mathcal{D}'(\Omega)$, nghĩa là

(i) $D^\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda D^\alpha f + \mu D^\alpha g, \forall\lambda, \mu \in \mathbb{C}, f, g \in D'(\Omega)$,

(ii) Nếu $f_k, f \in \mathcal{D}'(\Omega), k = 1, 2, \ldots$ và $\mathcal{D}'_{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ thì $\mathcal{D}'_{-}\lim\limits_{k\to\infty} D^\alpha f_k = D^\alpha f$.

4. Cho $f_k \in \mathcal{D}'(\Omega), k = 1, 2, \ldots$, chuỗi hình thức $\sum_{k=1}^\infty f_k$ được gọi là hội tụ trong $\mathcal{D}'(\Omega)$ nếu dãy tổng riêng $\{\sum_{j=1}^k f_j\}_{k=1}^\infty$ hội tụ trong $\mathcal{D}'(\Omega)$. Khi đó, chuỗi $\sum_{k=1}^\infty D^\alpha f_k$ cũng hội tụ trong $\mathcal{D}'(\Omega)$ và

$$D^\alpha\Big(\sum_{k=1}^\infty f_k\Big) = \sum_{k=1}^\infty D^\alpha f_k.$$

5. Dãy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ được gọi là dãy Cauchy trong $\mathcal{D}'(\Omega)$ nếu với mỗi $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dãy $\{\langle f_k, \varphi\rangle\}_{k=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$.

Định lý 1.7. *$\mathcal{D}'(\Omega)$ là không gian đủ.*

Để chứng minh Định lý ta cần đến Bổ đề sau.

Bổ đề 1.8. *Cho dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ trong $\mathcal{D}(\Omega)$ mà $\mathcal{D}_{-}\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k = 0$, và $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $\mathcal{D}'(\Omega)$. Khi đó, $\lim\limits_{k\to\infty}\langle f_k, \varphi_k\rangle = 0$.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử $\langle f_k, \varphi_k\rangle \not\to 0$ khi $k \to \infty$, nghĩa là có một số $c > 0$ và một dãy con, để đơn giản ký hiệu, ta có thể giả sử

$$|\langle f_k, \varphi_k\rangle| > c, k = 1, 2, \ldots.$$

Bằng cách lấy ra một dãy con của dãy con trên, để đơn giản ký hiệu, ta có thể có

$$|D^\alpha \varphi_k(x)| \leq \frac{1}{4^k}, \forall x \in \Omega, |\alpha| \leq k, k = 1, 2, \ldots.$$

Đặt $\psi_k = 2^k \varphi_k$ có

(i) $\psi_k \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{supp}\psi_k \subset \operatorname{supp}\varphi_k$,

(ii) $\mathcal{D}_- \lim\limits_{k\to\infty} \psi_k = 0, \lim\limits_{k\to\infty} \langle f_k, \psi_k\rangle = +\infty$.

Ta đi xây dựng dãy $\{f'_k, \psi'_k\}_{k=1}^\infty$ bằng cách quy nạp như sau.
Do $\lim\limits_{l\to\infty} \langle f_l, \psi_l\rangle = +\infty$ nên có một số tự nhiên l_1 sao cho $|\langle f_{l_1}, \varphi_{l_1}\rangle| > 1$.
Đặt $f'_1 = f_{l_1}, \psi'_1 = \psi_{l_1}$.
Do $\mathcal{D}_- \lim\limits_{l\to\infty} \psi_l = 0$ nên có một số tự nhiên $k_1 > l_1$ sao cho $|\langle f'_1, \psi_l\rangle| < 1, \forall l \geq k_1$. Mà dãy $\{\langle f_l, \psi'_1\rangle\}_{l=1}^\infty$ là dãy Cauchy nên bị chặn, còn $\lim\limits_{l\to\infty} \langle f_l, \psi_l\rangle = +\infty$ nên có một số tự nhiên $l_2 > k_1$ sao cho $|\langle f_l, \psi_l\rangle| > |\langle f_l, \psi'_1\rangle| + 1, \forall l \geq l_2$.
Đặt $f'_2 = f_{l_2}, \psi'_2 = \psi_{l_2}$. Có

(i)$|\langle f'_1, \psi'_2\rangle| < \frac{1}{2}$,

(ii)$|\langle f'_2, \psi'_2\rangle| > |\langle f'_2, \psi'_1\rangle| + 1$.

Giả sử ta đã có $f'_1, \ldots, f'_{k-1}, \psi'_1, \ldots, \psi_{k-1} (k > 2, f'_j = f_{l_j}, l_1 < l_2 < \cdots < l_{k-1})$ mà

(i)$|\langle f'_j, \psi'_{k-1}\rangle| < \frac{1}{2^{k-1-j}}, j = 1, \ldots, k-2$,

(ii)$|\langle f'_{k-1}, \psi'_{k-1}\rangle| > \sum_{j=1}^{k-2} |\langle f'_{k-1}, \psi'_j\rangle| + k - 1$.

Do $\mathcal{D}_- \lim\limits_{l\to\infty} \psi_l = 0$ nên có một số tự nhiên $k_2 > l_{k-1}$ sao cho

$$|\langle f'_j, \psi_l\rangle| < \frac{1}{2^{l-j}}, j = 1, \ldots, k-2, \forall l \geq k_2.$$

Với mỗi $j = 1, \ldots, k-2$, dãy $\{\langle f_l, \psi'_j\rangle\}_{l=1}^\infty$ là dãy Cauchy nên bị chặn, còn $\lim\limits_{l\to\infty} \langle f_l, \psi_l\rangle = +\infty$ nên có một số tự nhiên $l_k > k_2$ sao cho

$$|\langle f_l, \psi_l\rangle| > \sum_{j=1}^{k-2} |\langle f_l, \psi'_j\rangle| + k, \forall l \geq l_k.$$

Đặt $f'_k = f_{l_k}, \psi'_k = \psi_{l_k}$. Có (i)$|\langle f'_j, \psi'_k\rangle| < \frac{1}{2^{k-j}}, j = 1, \ldots, k-1,$

(ii)$|\langle f'_k, \psi'_k\rangle| > \sum_{j=1}^{k-1} |\langle f'_k, \psi'_j\rangle| + k.$

Có dãy $\{\psi'_k\}_{k=1}^\infty = \{\psi_{l_k}\}_{k=1}^\infty$ là dãy con của dãy $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ mà $\psi_k = 2^k\varphi_k$ nên

(i) có một tập compact $K \subset \Omega$ sao cho $\operatorname{supp} \psi'_k \subset K, k = 1, 2, \ldots,$

(ii)với mỗi $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, m_2, m_1 \in \mathbb{Z}_+, m_2 > m_1 > |\alpha|$ có

$$\sum_{k=m_1}^{m_2} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha \psi'_k(x)| = \sum_{k=m_1}^{m_2} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha \psi_{l_k}(x)| < \sum_{k=m_1}^{m_2} \frac{1}{2^{l_k}} \leq \sum_{k=m_1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m_1-1}}.$$

Do đó, dãy $\{\sum_{l=1}^k \psi'_l\}_{k=1}^\infty$ hội tụ trong $\mathcal{D}(\Omega)$, nghĩa là có một hàm $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mà

$$\psi = \mathcal{D}\_\lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^k \psi'_l.$$

Khi đó, có

$$\begin{aligned} |\langle f'_k, \psi\rangle| &\geq |\langle f'_k, \psi'_k\rangle| - \sum_{j=1}^{k-1} |\langle f'_k, \psi'_j\rangle| - \lim_{l\to\infty} \sum_{j=k+1}^{l} |\langle f'_k, \psi'_j\rangle| \\ &\geq k - \lim_{l\to\infty} \sum_{j=k+1}^{l} \frac{1}{2^{j-k}} = k - 1, \end{aligned}$$

nghĩa là, dãy $\{\langle f'_k, \psi\rangle\}_{k=1}^\infty$ là không bị chặn, do đó cũng không là dãy Cauchy nên dãy $\{f'_k\}_{k=1}^\infty$ không là Cauchy trong $\mathcal{D}'(\Omega)$. Điều này trái với giả thiết. Như vậy điều giả sử sai hay ta có điều phải chứng minh. □

Chứng minh. Bây giờ ta đi chứng minh Định lý 1.7. Lấy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ta phải chứng minh có một hàm suy rộng $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mà $f = \mathcal{D}'\_\lim_{k\to\infty} f_k$
Do $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $\mathcal{D}'(\Omega)$ nên với mỗi $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dãy $\{\langle f_k, \varphi\rangle\}_{k=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$, do đó tồn tại một phần tử ký hiệu $\langle f, \varphi\rangle \in \mathbb{C}$ mà $\lim_{k\to\infty} \langle f_k, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$.
Rõ ràng tương ứng, ký hiệu $f : \varphi \mapsto \langle f, \varphi\rangle$ là phiếm hàm tuyến tính từ $\mathcal{D}(\Omega)$ vào $\mathbb{C}$. Ta sẽ chứng minh f là liên tục. Khi đó, $f = \mathcal{D}'\_\lim_{k\to\infty} f_k$.
Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử có một dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ trong $\mathcal{D}(\Omega)$ mà $\mathcal{D}\_\lim_{k\to\infty} \varphi_k = 0$, nhưng $\langle f, \varphi_k\rangle \not\to 0$ khi $k \to \infty$, nghĩa là có một số $c > 0$ và một dãy con, để đơn giản ký hiệu ta có thể giả sử $|\langle f, \varphi_k\rangle| = \lim_{l\to\infty} |\langle f_l, \varphi_k\rangle| > c, k = 1, 2, \ldots$. Do đó, với mỗi k có một số l_k sao cho $|\langle f_{l_k}, \varphi_k\rangle| > c$.
Đặt $f'_k = f_{l_k}$ có

(i) $\{f'_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $\mathcal{D}'(\Omega)$,

(ii) $\mathcal{D}_-\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k = 0$,

(iii) $|\langle f'_k, \varphi_k\rangle| > c, k = 1, 2, \ldots$,

mà theo Bổ đề 1.8 có $\lim\limits_{k\to\infty}|\langle f'_k, \varphi_k\rangle| = 0$ nên xảy ra điều mâu thuẫn. Do đó điều giả sử sai hay f liên tục. □

1.2.6 Địa phương hoá

Cho Ω_1, Ω_2 là các tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Với mỗi hàm $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$ có thể coi là hàm trên Ω_2 bằng cách sau

$$\varphi^{\Omega_2}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{, nếu } x \in \Omega_1, \\ 0 & \text{, nếu } x \in \Omega_2 \backslash \Omega_1, \end{cases}$$

thì $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_2)$.
Khi đó, với mỗi $f \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ ta coi là một hàm suy rộng trên Ω_1 bằng cách sau

$$\langle f|_{\Omega_1}, \varphi\rangle = \langle f, \varphi^{\Omega_2}\rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1).$$

Nếu $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega_2), f \neq g$ thì chưa chắc $f|_{\Omega_1} \neq g|_{\Omega_1}$ hay nếu $f|_{\Omega_1} = g|_{\Omega_1}$ thì chưa chắc $f = g$. Nếu $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_2), \operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_1$ thì có thể coi $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$ và $\langle f, \varphi\rangle = \langle f|_{\Omega_1}, \varphi\rangle$.

Định nghĩa 1.7. Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, điểm $x \in \Omega$, các hàm suy rộng $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Ta nói rằng $f = g$ tại x nếu có một lân cận mở $\omega \subset \Omega$ của x để

$$f|_\omega = g|_\omega.$$

Chú ý. 1. Cho $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Khi đó, $f \neq g$ tại một điểm $x \in \Omega$ nếu với mọi lân cận mở $\omega \subset \Omega$ của x đều có một hàm $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \operatorname{supp}\varphi \subset \omega$ sao cho

$$\langle f, \varphi\rangle \neq \langle g, \varphi\rangle$$

hay có một dãy hình cầu $B_{r_k}(x) \subset \Omega$ mà $r_k \searrow 0$ khi $k \nearrow \infty$ và một dãy hàm $\varphi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ mà $\operatorname{supp}\varphi_k \subset B_{r_k}(x)$ sao cho

$$\langle f, \varphi_k\rangle \neq \langle g, \varphi_k\rangle.$$

2. Cho $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Nếu $f = g$ trong $\mathcal{D}'(\Omega)$ thì $f = g$ tại mọi điểm $x \in \Omega$.
Định lý sau cho ta thấy điều ngược lại cũng đúng.

Định lý 1.9. *Cho $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Nếu với mọi $x \in \Omega$ đều có $f = g$ tại x thì $f = g$ trong $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Chứng minh. Với mỗi $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ có $K = \operatorname{supp}\varphi$ là tập compact trong Ω. Từ giả thiết, với mỗi $x \in K$ có một lân cận mở ω_x của x mà $f|_{\omega_x} = g|_{\omega_x}$.
Có $K \subset \cup_{x\in K}\omega_x$ mà K compact nên có một số hữu hạn điểm $x_1, \ldots, x_m \in K$ mà $K \subset \cup_{j=1}^m \omega_{x_j}$. Theo Định lý 1.1 (Định lý phân hoạch đơn vị) có một họ hữu hạn các hàm $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ trong $\mathcal{D}(\Omega)$ sao cho

(i) $0 \leq \psi_j(x) \leq 1, \forall x \in K, j = 1, 2, \ldots,$

(ii) $\operatorname{supp} \psi_j \subset \omega_{x_j}, j = 1, 2, \ldots,$

(iii)$\sum_{j=1}^{m} \psi_j(x) = 1, \forall x \in K.$

Khi đó, có

$$\begin{aligned}
\langle f, \varphi \rangle &= \langle f, (\sum_{j=1}^{m} \psi_j)\varphi \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{m} \langle f|_{\omega_j}, \psi_j \varphi \rangle (\text{ vì } \psi_j \varphi \in \mathcal{D}(\omega_{x_j})) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \langle g|_{\omega_j}, \psi_j \varphi \rangle \\
&= \langle g, \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

nên ta có $f = g$ trong $\mathcal{D}'(\Omega)$. $\square$

1.3 Không gian hàm cơ bản $\mathcal{E}(\Omega)$, không gian hàm suy rộng với giá compact $\mathcal{E}'(\Omega)$

1.3.1 Không gian hàm cơ bản $\mathcal{E}(\Omega)$

Định nghĩa 1.8. Không gian $\mathcal{E}(\Omega)$ là không gian gồm các hàm $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ với khái niệm hội tụ sau:
dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ trong $C^\infty(\Omega)$ được gọi là hội tụ đến hàm $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ trong $\mathcal{E}(\Omega)$ nếu

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi_k(x) - D^\alpha \varphi(x)| = 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, K \subset\subset \Omega.$$

Khi đó, ta viết $\mathcal{E}_- \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$.

Chú ý. 1. Ta có thể tách Ω thành $\Omega = \cup_{k=1}^\infty \Omega_k$ với $\Omega_k \overset{\text{mở}}{\subset} \bar{\Omega}_k \overset{compact}{\subset} \Omega_{k+1} \subset \Omega$ (chẳng hạn $\Omega_k = \{x \in \Omega |\ ||x|| < k\ \&\ d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\}$). Do đó, một dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ trong $C^\infty(\Omega)$ được gọi là hội tụ đến hàm $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ trong $\mathcal{E}(\Omega)$ nếu một trong các trường hợp sau xảy ra

- $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in\Omega_j} |D^\alpha \varphi_j(x) - D^\alpha \varphi(x)| = 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, j = 1, 2, \dots,$
- $\lim\limits_{k\to\infty} \|\varphi_k - \varphi\|_{C^j(\Omega_j)} = 0, j = 1, 2, \dots,$

trong đó $\|\varphi_k - \varphi\|_{C^j(\Omega_j)} = \sum\limits_{|\alpha|\le j} \sup\limits_{x\in\Omega_j} |D^\alpha \varphi_k(x) - D^\alpha \varphi(x)|$.
Khi đó, một dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ trong $C^\infty(\Omega)$ được gọi là dãy Cauchy trong $\mathcal{E}(\Omega)$ nếu một trong các trường hợp sau xảy ra

- $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ l\to\infty}} \sup\limits_{x\in\Omega_j} |D^\alpha \varphi_k(x) - D^\alpha \varphi_l(x)| = 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, j = 1, 2, \dots,$
- $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ l\to\infty}} \|\varphi_k - \varphi_l\|_{C^j(\Omega_j)} = 0, j = 1, 2, \dots.$

2. Khái niệm hội tụ trong $\mathcal{E}(\Omega)$ là phù hợp với cấu trúc tuyến tính của nó, nghĩa là với $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \varphi_k, \varphi, \psi_k, \psi \in \mathcal{E}(\Omega), k = 1, 2, \dots,$

$$\text{nếu } \mathcal{E}_- \lim_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi, \mathcal{E}_- \lim_{k\to\infty} \psi_k = \psi \text{ thì } \lim_{k\to\infty} (\lambda\varphi_k + \mu\psi_k) = \lambda\varphi + \mu\psi.$$

3. Nếu $a(.) \in C^\infty(\Omega)$ thì phép nhân với $a(.)$ biến $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ thành $a\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ là ánh xạ tuyến tính liên tục.
Với mỗi $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, phép toán đạo hàm D^α là ánh xạ tuyến tính liên tục trong $\mathcal{E}(\Omega)$.
4. Tập $C_0^\infty(\Omega)$ là trù mật trong $\mathcal{E}(\Omega)$. Thật vậy, do $\bar{\Omega}_k$ là tập compact trong Ω nên theo Mệnh đề 1.3 có một hàm $\psi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ mà $\psi_k(x) = 1, x \in \bar{\Omega}_k$. Khi đó, với mỗi $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ có $(\psi_k\varphi) \in C_0^\infty(\Omega)$ và $\mathcal{E}_- \lim\limits_{k\to\infty} \psi_k\varphi = \varphi$.
5. Nếu $\varphi_k, \varphi \in C_0^\infty(\Omega), k = 1, 2, \dots,$ và $\mathcal{D}_- \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$ thì $\mathcal{E}_- \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$. Do đó, ta có phép nhúng liên tục $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$.

Ví dụ 14. Trên $\mathbb{R}$, đặt hàm

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{nếu } |x| < 1, \\ 0 & \text{nếu } |x| \leq 1, \end{cases}$$

và $\rho_{(k)}(x) = \rho(x-k)$, thì $\rho, \rho_{(k)} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ và

- $\mathcal{E}_-\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{(k)} = 0, \lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in[-k,k]} |\rho_{(k)}(x)| = e^{-\frac{4}{3}} > 0,$
- không có giới hạn $\mathcal{D}_-\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{(k)}$.

Ví dụ 15. Trên $\mathbb{R}$, với $k \in \mathbb{N}$, do $[\frac{1}{3k}, \frac{2}{3k}]$ là tập compact nên theo Mệnh đề 1.3 có một hàm $\psi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mà $\psi_k(x) = 1, x \in [\frac{1}{3k}, \frac{2}{3k}], \operatorname{supp}\psi_k \subset [0, \frac{1}{k}]$. Đặt $\varphi_k(x) = (x - \frac{1}{2k})^k \psi_k(x)$ có

$$\begin{aligned} |D^j \varphi_k(x)| &= |\sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \frac{k!}{(k-l)!} (x - \frac{1}{2k})^{k-l} D^{k-l}\psi_k(x)| \\ &\leq \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \frac{k!}{(k-l)!} (\frac{1}{2k})^{k-l} |D^{k-l}\psi_k(x)|, \end{aligned}$$

mà $\lim\limits_{k\to\infty} \binom{j}{l} \frac{k!}{(k-l)!} (\frac{1}{2k})^{k-l} = 0, j, l = 1, 2, \ldots$, nên $\mathcal{E}_-\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0$,
lại có

$$|D^k \varphi_k(x)| = |\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \frac{k!}{(k-l)!} (x - \frac{1}{2k})^{k-l} D^{k-l}\psi_k(x)|,$$

nên khi $x = \frac{1}{2k}$ có $|D^k \varphi_k(\frac{1}{2k})| = |\psi_k(\frac{1}{2k})| = 1$.

Mệnh đề 1.10. *Không gian $\mathcal{E}(\Omega)$ là đủ.*

Chứng minh. Lấy $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $\mathcal{E}(\Omega)$. Có

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ l\to\infty}} \sup_{x\in\Omega_j} |D^\alpha \varphi_k(x) - D^\alpha \varphi_l(x)| = 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, j = 1, 2, \ldots.$$

Do đó, trên từng Ω_j dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ hội tụ đều đến một hàm $\varphi^{(j)}$.
Khi đó, với mỗi $x \in \Omega$ có một số tự nhiên j sao cho $x \in \Omega_j$, ta đặt $\varphi(x) = \varphi^{(j)}(x)$.
Dễ dàng chứng minh $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ và

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\Omega_j} |D^\alpha \varphi_k(x) - D^\alpha \varphi(x)| = 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, j = 1, 2, \ldots,$$

hay $\mathcal{E}_-\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$. $\square$

1.3.2 Không gian hàm suy rộng $\mathcal{E}'(\Omega)$

Định nghĩa 1.9 (Giá của hàm suy rộng). Cho $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Giá của hàm suy rộng f được xác định như sau

$$\operatorname{supp} f = \{x \in \Omega \big| f \neq 0 \text{ tại } x\}.$$

Hàm suy rộng f được gọi là có giá compact nếu giá $\operatorname{supp} f$ là tập compact. Tập hợp tất cả các hàm suy rộng có giá compact được ký hiệu là $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Chú ý. 1. Số 0 trong định nghĩa là hàm suy rộng không được xác định như sau:

$$\langle 0, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

2. Hàm suy rộng $f \neq 0$ tại x nghĩa là với mọi lân cận mở $\omega \subset \Omega$ của x đều có một hàm $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ mà $\langle f, \varphi \rangle \neq 0$. Do đó, ta còn có thể định nghĩa giá của hàm suy rộng như sau. Đặt W là hợp tất cả các tập mở ω trong Ω sao cho $\langle f, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\omega)$. Khi đó, giá của hàm suy rộng f sẽ là $\operatorname{supp} f = \Omega \backslash W$. Rõ ràng, $\operatorname{supp} f$ là tập đóng trong Ω.
3. Cho $f \in \mathcal{E}'(\Omega), \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ và $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$ thì $\langle f, \varphi \rangle = 0$.
4. Cho $f \in \mathcal{D}'(\Omega), \varphi \in C^\infty(\Omega)$ thì $\operatorname{supp}(\varphi f) \subset \operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} f$. Nếu $f, g \in \mathcal{E}'(\Omega)$ thì $\operatorname{supp}(f+g) \subset (\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g)$ và $D^\alpha f \in \mathcal{E}'(\Omega), \operatorname{supp} D^\alpha f \subset \operatorname{supp} f, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.
5. Không gian $\mathcal{E}'(\Omega)$ là không gian đóng đối với các phép toán tuyến tính, phép nhân với một hàm $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, phép lấy đạo hàm suy rộng.
6. Với một hàm $f : \Omega \to \mathbb{C}$ đo được thì khái niệm giá theo nghĩa thông thường là không có ý nghĩa. Để thấy được điều này ta xét ví dụ sau, với $\Omega = (0,1)$ còn hàm $f : (0,1) \to \mathbb{C}$ được xác định như sau

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \text{ hữu tỷ}, \\ 0, & \text{nếu } x \text{ vô tỷ}, \end{cases}$$

có $f = 0$ $h.k.n$ trên $(0,1)$ và $\operatorname{supp} f = (0,1) \neq \emptyset = \operatorname{supp} 0$.
Với một hàm liên tục $f \in C(\Omega)$ thì giá thông thường và giá của hàm suy rộng tương ứng với f là bằng nhau.

Ví dụ 16. $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$.

Ví dụ 17. $\operatorname{supp} \theta = [0, +\infty)$.

Ví dụ 18. Tổng $\sum_\alpha c_\alpha D^\alpha \delta$, trong đó chỉ có một số hữu hạn α mà $c_\alpha \neq 0$ có giá $\{0\}$. Một hàm suy rộng $f \in \mathcal{E}'(\Omega), 0 \in \Omega$ mà có $\operatorname{supp} f = \{0\}$ thì f có dạng như trên.
Thật vậy, do $f \in \mathcal{E}'(\Omega)$ nên f có giá compact nên theo Định lý 1.6 f có cấp hữu hạn, nghĩa là có một số tự nhiên m, một số $c > 0$ sao cho

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \varphi(x)|, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Với mỗi $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ có giá $\operatorname{supp} \varphi = K$ là tập compact trong Ω nên theo Mệnh đề 1.3 có một hàm $h \in C_0^\infty(\Omega)$ mà $h(x) = 1, \forall x \in K$. Khi đó, có

- $\phi(x) = h(x)\big(\sum\limits_{|\alpha|\leq m} \frac{1}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!} D^\alpha\varphi(0)x^\alpha\big) \in C_0^\infty(\Omega)$,
- $\psi = \varphi - \phi \in C_0^\infty(\Omega), |D^\alpha\psi(x)| = O(||x||^{m+1-|\alpha|})$ khi $||x||$ đủ nhỏ, $(|\alpha| \leq m)$,

nên $\langle f, \varphi\rangle = \langle f, \phi\rangle + \langle f, \psi\rangle = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} c_\alpha D^\alpha\varphi(0) + \langle f, \psi\rangle,\ c_\alpha = \frac{1}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!}\langle f, h(x)x^\alpha\rangle$.
Đặt $\phi_\epsilon(x) = \int_{B_{2\epsilon}(0)} \rho_\epsilon(x-y)dy$ có với $\epsilon > 0$ đủ nhỏ

$$\phi_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{supp}\phi_\epsilon \cap \{0\} = \emptyset, \phi_\epsilon(x) = 1 \text{ khi } ||x|| \leq \epsilon, \text{ nên } \langle f, \psi\rangle = \langle f, \phi_\epsilon\psi\rangle.$$

Lại có

$$|\langle f, \phi_\epsilon\psi\rangle| \leq c \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha(\phi_\epsilon\psi(x))|,$$

$$D^\alpha(\psi_\epsilon\psi)(x) = \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}\phi_\epsilon(x)D^\beta\psi(x),$$

$$|D^{\alpha-\beta}\phi_\epsilon(x)| = \int_{B_{2\epsilon}(0)} \rho_\epsilon(x-y)dy = (-\epsilon)^{-|\alpha-\beta|}\int_{B_2(0)} D^{\alpha-\beta}\rho(x-y)dy \leq c_\alpha\epsilon^{-|\alpha-\beta|},$$

nên với mọi $\epsilon > 0$ đủ nhỏ $|\langle f, \psi_\epsilon\psi\rangle| \leq c \sum\limits_{|\beta|\leq|\alpha|} \frac{|O(\epsilon^{m+1-|\beta|})|}{\epsilon^{|\alpha-\beta|}}$ do đó, khi $\epsilon \to 0$ thì $|\langle f, \psi\rangle| = |\langle f, \psi_\epsilon\psi\rangle| \to 0$ hay $|\langle f, \psi\rangle| = 0$.
Như vậy

$$\langle f, \varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha D^\alpha\varphi(0) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha\langle D^\alpha\delta, \varphi\rangle.$$

Định lý 1.11 (Định nghĩa khác của không gian hàm suy rộng có giá compact). *(i) Cho hàm suy rộng với giá compact $f \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Khi đó, ta có thể thác triển f lên thành phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{E}(\Omega)$.*

(ii) Giả sử f là một phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên $\mathcal{E}(\Omega)$. Khi đó, ta có thể thu hẹp f thành hàm suy rộng có giá compact.

(iii) Các tương ứng trên cho ta một song ánh giữa không gian hàm suy rộng với giá compact $\mathcal{E}'(\Omega)$ và không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{E}(\Omega)$.

Nhận xét. Từ Định lý 1.11, mỗi hàm suy rộng có giá compact có thể được xem như một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{E}(\Omega)$, không gian các hàm suy rộng có giá compact $\mathcal{E}'(\Omega)$ có thể coi là không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{E}(\Omega)$.
Từ Định lý 1.6 mỗi hàm suy rộng có giá compact $f \in \mathcal{E}'(\Omega)$ đều có cấp hữu hạn trên Ω. Hơn nữa, có một tập compact $K \subset \Omega$, một số nguyên không âm m và một số dương C sao cho

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |D^\alpha\varphi(x)|,\ \forall\varphi \in C^\infty(\Omega), \tag{1.2}$$

Một phiếm hàm tuyến tính $f : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{C}$ thoả mãn bất đẳng thức (1.2) có $f : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{C}$ là liên tục.

Chứng minh. (i) Giả sử $f \in \mathcal{E}'(\Omega)$ có $\operatorname{supp} f = K$ là tập compact trong Ω. Theo Mệnh đề 1.3, có một hàm $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ mà $\psi(x) = 1$ với x nằm trong lân cận nào đó của K.
Đặt $\bar{f}$ là phiếm hàm từ $\mathcal{E}(\Omega)$ vào $\mathbb{C}$ được xác định như sau

$$\langle \bar{f}, \varphi \rangle = \langle f, \psi\varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{E}(\Omega).$$

Dễ thấy

(a) $\bar{f}$ không phụ thuộc vào việc chọn hàm ψ, nghĩa là nếu có $\psi_1, \psi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$ mà

- $\psi_1(x) = 1$ khi x nằm trong lân cận K_1 của K,
- $\psi_2(x) = 1$ khi x nằm trong lân cận K_2 của K,

thì $\operatorname{supp}(\psi_1 - \psi_2) \cap K = \emptyset$ nên $\langle f, \psi_1\varphi \rangle = \langle f, \psi_2\varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$,

(b) $\bar{f} \in \mathcal{E}'(\Omega)$, nghĩa là

- nếu $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \varphi, \psi \in \mathcal{E}(\Omega)$ thì $\langle \bar{f}, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = \lambda\langle \bar{f}, \varphi \rangle + \mu\langle \bar{f}, \psi \rangle$,
- nếu $\mathcal{E}_-\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0$ thì $\lim\limits_{k\to\infty} \langle \bar{f}, \varphi_k \rangle = 0$,

(c) $\bar{f}\big|_{\mathcal{D}(\Omega)} = f$, nghĩa là với mỗi $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ có $K_1 = (K \cup \operatorname{supp}\varphi) \subset\subset \Omega$ nên theo Mệnh đề 1.3 có một hàm $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ mà $\psi(x) = 1$ với x nằm trong lân cận nào đó của K_1, do đó $\psi(x)\varphi(x) = \varphi(x), x \in \Omega$ nên $\langle \bar{f}, \varphi \rangle = \langle f, \psi\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$.

Giả sử $f, g \in \mathcal{E}'(\Omega)$ mà $\bar{f} = \bar{g}$ thì $f = \bar{f}\big|_{\mathcal{D}(\Omega)} = \bar{g}\big|_{\mathcal{D}(\Omega)} = g$, hay ánh xạ $f \mapsto \bar{f}$ là đơn ánh từ $\mathcal{E}'(\Omega)$ vào không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{E}(\Omega)$.
(ii) Lấy g là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{E}(\Omega)$, đặt $f = g|_{\mathcal{D}(\Omega)}$. Do phép $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ là liên tục nên $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Ta chỉ còn phải chứng minh $\operatorname{supp} f$ là tập compact.
Ta chứng minh bằng phản chứng, nghĩa là giả sử $\operatorname{supp} f$ không compact, mà Ω có thể viết thành $\Omega = \cup_{k=1}^\infty \Omega_k$ với $\Omega_k \overset{\text{mở}}{\subset} \bar{\Omega}_k \overset{compact}{\subset} \Omega_{k+1} \subset \Omega$ nên $\operatorname{supp} f \not\subset \Omega_k, k = 1, 2, \ldots$, hay với mỗi k có $x_k \in \Omega \backslash \bar{\Omega}_k$ mà $f \neq 0$ tại x_k. Khi đó, với mỗi k có một lân cận mở $\omega_k \subset (\Omega \backslash \bar{\Omega}_k)$, một hàm $\varphi_k \in C_0^\infty(\omega_k)$ sao cho $\langle f, \varphi_k \rangle = 1$.
Với mỗi tập compact $K \subset\subset \Omega$ đều có một số tự nhiên k_0 sao cho $K \subset \Omega_k, \forall k \geq k_0$. Mà $\operatorname{supp}\varphi \subset \omega_k \subset (\Omega \backslash \bar{\Omega}_k)$ nên $\varphi_k(x) = 0, x \in K, k \geq k_0$. Do đó, $\mathcal{E}_-\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0$.
Như vậy, có

(a)$\mathcal{E}_-\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0$,

(b)$\langle g, \varphi_k \rangle = \langle f, \varphi_k \rangle = 1$,

nên g không liên tục trên $\mathcal{E}(\Omega)$.
Điều này trái với giả thiết hay điều giả sử sai nghĩa là $\operatorname{supp} f$ compact.
(iii) Dưới đây, ta sẽ chứng minh ánh xạ $f \mapsto \bar{f}$ là toàn ánh từ $\mathcal{E}'(\Omega)$ vào không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{E}(\Omega)$, cụ thể là ta chứng minh ánh xạ $g \mapsto g|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ là ánh

xạ ngược của nó.
Lấy g là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{E}(\Omega)$, đặt $f = g|_{\mathcal{D}(\Omega)}$. Theo $(i), (ii)$ có $f \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $\bar{f}$ là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{E}(\Omega)$ và $\bar{f}|_{\mathcal{D}(\Omega)} = g|_{\mathcal{D}(\Omega)}$.
Do $C_0^\infty(\Omega)$ là tập trù mật trong $\mathcal{E}(\Omega)$ và $\bar{f}, g$ là các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{E}(\Omega)$ nên $\bar{f} = g$, nghĩa là với mỗi g là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{E}(\Omega)$ đều có một hàm $f = g|_{\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{E}(\Omega)$ sao cho $\bar{f} = g$.
Như vậy, ta có một song ánh từ không gian hàm suy rộng với giá compact $\mathcal{E}'(\Omega)$ đến không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{E}(\Omega)$. □

1.3.3 Sự hội tụ trong không gian hàm suy rộng $\mathcal{E}'(\Omega)$

Định nghĩa 1.10. Cho $f_k, f \in \mathcal{E}'(\Omega), k = 1, 2, \ldots$. Ta nói rằng dãy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ hội tụ đến f trong $\mathcal{E}'(\Omega)$ nếu

(i) có một tập compact $K \subset \Omega$ mà $\operatorname{supp} f_k \subset K, k = 1, 2, \ldots,$

(ii)dãy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ hội tụ đến f trong $\mathcal{D}'(\Omega)$ nghĩa là $\mathcal{D}'\_\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$.

Khi đó, ta viết $\mathcal{E}'\_\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$.

Ví dụ 19. $\mathcal{E}'\_\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{\frac{1}{k}} = \delta$.

Ví dụ 20. Cho dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ trong $C_0^\infty(\Omega)$ mà $\operatorname{supp}\varphi_{k+1} \subset \operatorname{supp}\varphi_k, \cap_{k=1}^\infty \operatorname{supp}\varphi_k = \{0\}$ và $\int_\Omega |\varphi_k(x)|dx \leq C, \int_\Omega \varphi_k(x)dx = 1$ thì $\mathcal{E}'\_\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \delta$.

Chú ý. 1. Khái niệm hội tụ trên $\mathcal{E}'(\Omega)$ là phù hợp với cấu trúc tuyến tính. Các phép toán nhân với một hàm trong $C^\infty(\Omega)$ và đạo hàm suy rộng D^α, với mỗi $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, là ánh xạ tuyến tính liên tục trong $\mathcal{E}'(\Omega)$.
2. Dãy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ trong $\mathcal{E}'(\Omega)$ được gọi là dãy Cauchy trong $\mathcal{E}'(\Omega)$ nếu

(i) có một tập compact $K \subset \Omega$ mà $\operatorname{supp} f_k \subset K, k = 1, 2, \ldots,$

(ii)dãy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $\mathcal{D}'(\Omega)$.

3. Nếu $\mathcal{E}'\_\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ thì $\mathcal{D}'\_\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$. Do đó, phép nhúng $\mathcal{E}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ là liên tục. Ngoài ra, $\lim\limits_{k\to\infty} \langle f_k, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle, \varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$.

Định lý 1.12. *Không gian $\mathcal{E}'(\Omega)$ là đủ.*

Chứng minh. Lấy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $\mathcal{E}'(\Omega)$. Khi đó, có

(i) có một tập compact $K \subset \Omega$ mà $\operatorname{supp} f_k \subset K, k = 1, 2, \ldots,$

(ii)dãy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Mà $\mathcal{D}'(\Omega)$ là không gian đủ nên tồn tại $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ để $\mathcal{D}'_{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$. Ta chỉ còn phải chứng minh $\operatorname{supp} f$ là tập compact trong Ω.
Giả sử, $\operatorname{supp} f \not\subset K$, nghĩa là có một điểm $x \in \Omega\backslash K$ mà $f \neq 0$ tại x hay có một lân cận mở $\omega_x \subset (\Omega\backslash K)$, một hàm $\varphi \in C_0^\infty(\omega_x)$ mà $\langle f, \varphi\rangle = 1$.
Lại có, do $\omega_x \cap K = \emptyset$ hay $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp} f_k = \emptyset$ nên $\langle f_k, \varphi\rangle = 0$.
Nên $\lim\limits_{k\to\infty}\langle f_k, \varphi\rangle = 0 \neq 1 = \langle f, \varphi\rangle$, hay $\mathcal{D}'_{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k \neq f$.
Điều này dẫn đến điều mâu thuẫn, hay $\operatorname{supp} f \subset K$. □

Định lý 1.13 (Định nghĩa khác về khái niệm hội tụ trên $\mathcal{E}'(\Omega)$). *Cho $f_k \in \mathcal{E}'(\Omega), k = 1, 2, \ldots$. Khi đó, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $\mathcal{E}'(\Omega)$ khi và chỉ khi $\{\langle f_k, \varphi\rangle\}_{k=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$, với mỗi $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$.*

Để chứng minh Định lý 1.13 ta cần đến Bổ đề sau.

Bổ đề 1.14. *Cho $f_k : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{C}, k = 1, 2, \ldots$, là các phiếm hàm tuyến tính liên tục sao cho dãy $\{\langle f_k, \varphi\rangle\}_{k=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$, với mỗi $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$; dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ trong $\mathcal{E}(\Omega)$ mà $\mathcal{E}_{-}\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k = 0$. Khi đó, $\lim\limits_{k\to\infty}\langle f_k, \varphi_k\rangle = 0$.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử, $\langle f_k, \varphi_k\rangle \neq 0$ khi $k \to \infty$ nghĩa là có một số $c > 0$ và một dãy con, để đơn giản ký hiệu ta có thể giả sử $|\langle f_k, \varphi_k\rangle| > c, k = 1, 2, \ldots$.
Do $\mathcal{E}_{-}\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k = 0$ nên có một dãy con, để đơn giản ký hiệu ta có thể giả sử

$$\sup_{x\in\Omega_l}|D^\alpha\varphi_k(x)| < \frac{1}{4^k}, \forall \max\{|\alpha|, l\} \leq k, k = 1, 2, \ldots.$$

Đặt $\psi_k = 2^k\varphi_k$ có $\mathcal{E}_{-}\lim\limits_{k\to\infty}\psi_k = 0$ và $\lim\limits_{k\to\infty}|\langle f_k, \varphi_k\rangle| = +\infty$. Ta đi xây dựng dãy $\{f'_k, \psi'_k\}_{k=1}^\infty$ bằng cách quy nạp như sau.
Do $\lim\limits_{l\to\infty}\langle f_l, \psi_l\rangle = +\infty$ nên có một số tự nhiên l_1 sao cho $|\langle f_{l_1}, \varphi_{l_1}\rangle| > 1$.
Đặt $f'_1 = f_{l_1}, \psi'_1 = \psi_{l_1}$.
Do $\mathcal{E}_{-}\lim\limits_{l\to\infty}\psi_l = 0$ nên có một số tự nhiên $k_1 > l_1$ sao cho $|\langle f'_1, \psi_l\rangle| < 1, \forall l \geq k_1$. Mà dãy $\{\langle f_l, \psi'_1\rangle\}_{l=1}^\infty$ là dãy Cauchy nên bị chặn, còn $\lim\limits_{l\to\infty}\langle f_l, \psi_l\rangle = +\infty$ nên có một số tự nhiên $l_2 > k_1$ sao cho $|\langle f_l, \psi_l\rangle| > |\langle f_l, \psi'_1\rangle| + 1, \forall l \geq l_2$.
Đặt $f'_2 = f_{l_2}, \psi'_2 = \psi_{l_2}$. Có

(i)$|\langle f'_1, \psi'_2\rangle < \frac{1}{2}$,

(ii)$|\langle f'_2, \psi'_2\rangle| > |\langle f'_2, \psi'_1\rangle| + 1$.

Giả sử ta đã có $f'_1, \ldots, f'_{k-1}, \psi'_1, \ldots, \psi_{k-1} (k > 2, f'_j = f_{l_j}, l_1 < l_2 < \cdots < l_{k-1})$ mà

(i)$|\langle f'_j, \psi'_{k-1}\rangle| < \frac{1}{2^{k-1-j}}, j = 1, \ldots, k-2$,

(ii)$|\langle f'_{k-1}, \psi'_{k-1}\rangle| > \sum_{j=1}^{k-2}|\langle f'_{k-1}, \psi'_j\rangle| + k - 1$.

Do $\mathcal{E}_{-}\lim\limits_{l\to\infty}\psi_l = 0$ nên có một số tự nhiên $k_2 > l_{k-1}$ sao cho

$$|\langle f'_j, \psi_l\rangle| < \frac{1}{2^{l-j}}, j = 1, \ldots, k-2, \forall l \geq k_2.$$

Mà với mỗi $j = 1, \ldots, k-2$, dãy $\{\langle f_l, \psi'_j\rangle\}_{l=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy nên bị chặn, còn $\lim\limits_{l\to\infty}\langle f_l, \psi_l\rangle = +\infty$ nên có một số tự nhiên $l_k > k_2$ sao cho

$$|\langle f_l, \psi_l\rangle| > \sum_{j=1}^{k-2}|\langle f_l, \psi'_j\rangle| + k, \forall l \geq l_k.$$

Đặt $f'_k = f_{l_k}, \psi'_k = \psi_{l_k}$. Có

(i)$|\langle f'_j, \psi'_k\rangle| < \frac{1}{2^{k-j}}, j = 1, \ldots, k-1,$

(ii)$|\langle f'_k, \psi'_k\rangle| > \sum_{j=1}^{k-1}|\langle f'_k, \psi'_j\rangle| + k.$

Có dãy $\{\psi'_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\psi_{l_k}\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy con của dãy $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ mà $\psi_k = 2^k\varphi_k$ nên với mỗi $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, l, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+, m_2 > m_1 > \max\{|\alpha|, l\}$ có

$$\begin{aligned}\sum_{k=m_1}^{m_2}\sup_{x\in\Omega_l}|D^\alpha\psi'_k(x)| &= \sum_{k=m_1}^{m_2}\sup_{x\in\Omega_l}|D^\alpha\psi_{l_k}(x)| \\ &< \sum_{k=m_1}^{m_2}\frac{1}{2^{l_k}} \leq \sum_{k=m_1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m_1-1}}.\end{aligned}$$

Do đó, dãy $\{\sum_{l=1}^{k}\psi'_l\}_{k=1}^{\infty}$ hội tụ trong $\mathcal{E}(\Omega)$, nghĩa là có một hàm $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$ mà

$$\psi = \mathcal{E}_{-}\lim_{k\to\infty}\sum_{l=1}^{k}\psi'_l.$$

Khi đó, có

$$\begin{aligned}|\langle f'_k, \psi\rangle| &\geq |\langle f'_k, \psi'_k\rangle| - \sum_{j=1}^{k-1}|\langle f'_k, \psi'_j\rangle| - \lim_{l\to\infty}\sum_{j=k+1}^{l}|\langle f'_k, \psi'_j\rangle| \\ &\geq k - \lim_{l\to\infty}\sum_{j=k+1}^{l}\frac{1}{2^{j-k}} = k-1,\end{aligned}$$

nghĩa là, dãy $\{\langle f'_k, \psi\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ là không bị chặn, do đó dãy $\{\langle f_k, \psi\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ không là Cauchy trong $\mathbb{C}$. Điều này trái với giả thiết. Như vậy điều giả sử sai hay ta có điều phải chứng minh. $\square$

Chứng minh. Bây giờ ta đi chứng minh Định lý 1.13
(i) Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $\mathcal{E}'(\Omega)$ có

(a) có một tập compact $K \subset \Omega$ mà $\operatorname{supp} f_k \subset K, k = 1, 2, \ldots,$

(b)dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Do K là tập compact trong Ω nên có một hàm $\psi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ mà $\psi(x) = 1, x \in K$. Khi đó, với mỗi $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ có $K \cap (\operatorname{supp}(1-\psi)\varphi) = \emptyset$ nên $\langle f_k, \varphi\rangle = \langle f_k, \psi\varphi\rangle$. Mà $\psi\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nên $\{\langle f_k, \psi\varphi\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$ hay $\{\langle f_k, \varphi\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$.
(ii) Giả sử $f_k \in \mathcal{E}'(\Omega), k = 1, 2, \ldots,$ và $\{\langle f_k, \varphi\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$ với mỗi $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$. Mà $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ nên $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ta chỉ còn phải chứng minh $\cup_{k=1}^{\infty} \operatorname{supp} f_k$ là tập bị chặn. Khi đó, $K = cl(\cup_{k=1}^{\infty} \operatorname{supp} f_k)$ là tập compact trong Ω và $\operatorname{supp} f_k \subset K, k = 1, 2, \ldots$.
Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử K không là tập compact, do $\cup_{k=1}^{l} \operatorname{supp} f_k$ là tập compact với mọi l nên $\cup_{k=l}^{\infty} \operatorname{supp} f_k \not\subset \Omega_j, \forall j, l$. Ta xây dựng dãy $\{g_k, \varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ như sau.
Do $\cup_{k=1}^{\infty} \operatorname{supp} f_k \not\subset \Omega_1$nên tồn tại số l_1 và $x_1 \notin \bar{\Omega}_1$ sao cho $f_{l_1} \neq 0$ tại x_1 nghĩa là có một lân cận mở $\omega_1 \cap \bar{\Omega}_1 = \emptyset$ của x_1 và một hàm $\varphi_1 \in C_0^{\infty}(\omega_1)$ mà $\langle f_{l_1}, \varphi_1\rangle = 1$. Đặt $g_1 = f_{l_1}$.
Do $\cup_{k=l_1+1}^{\infty} \operatorname{supp} f_k$ không bị chặn nên có một số $l_2 > l_1$ và $x_2 \notin \bar{\Omega}_2$ sao cho $f_{l_2} \neq 0$ tại x_2 nghĩa là có một lân cận mở bị chặn $\omega_2 \cap \bar{\Omega}_2 = \emptyset$ của x_2 và một hàm $\varphi_2 \in C_0^{\infty}(\Omega)$ mà $\langle f_{l_2}, \varphi_2\rangle = 1$. Đặt $g_2 = f_{l_2}$.
Cứ thế, ta sẽ xây dựng được dãy $\{g_k, \varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ có tính chất sau

- dãy $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy con của dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ nên dãy $\{\langle g_k, \varphi_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$ với mỗi $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$,

- với mỗi k có $\varphi_k(x) = 0, x \in \Omega_k$ nên $\mathcal{E}_{-}\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0$,

nên theo Bổ đề 1.14 có $\lim\limits_{k\to\infty} \langle f_k, \varphi_k\rangle = 0$. Nhưng $\langle f_k, \varphi_k\rangle = 1$ nên ta có điều mâu thuẫn. Do đó điều giả sử sai hay K là tập compact. $\square$

1.4 Không gian các hàm giảm nhanh $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ và không gian các hàm tăng chậm $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

1.4.1 Không gian các hàm giảm nhanh (Schwartz) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Định nghĩa 1.11. Không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ là tập hợp

$$S(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \big| |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < c_{\alpha,\beta}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n\}$$

với khái niệm hội tụ được định nghĩa như sau

dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ trong $S(\mathbb{R}^n)$ được gọi là hội tụ đến $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ trong $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nếu

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi_k(x) - x^\alpha D^\beta \varphi(x)| = 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Khi đó, ta viết $\mathcal{S}_- \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$.

Chú ý. 1. Hàm $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ là hàm giảm nhanh, nghĩa là với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ có $|x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \le C_{\alpha,\beta}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi

(a) với mỗi $m \in \mathbb{Z}_+, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ có $(1 + \|x\|^2)^m |D^\beta \varphi(x)| \le C_{m,\beta}, \forall x \in \mathbb{R}^n$

(b) hay với mỗi $m \in \mathbb{Z}_+$ có $(1 + \|x\|^2)^m \sum_{|\beta|\le m} |D^\beta \varphi(x)| \le C_m, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Với $\varphi_k, \varphi \in S(\mathbb{R}^n), k = 1, 2, \ldots,$ có $\mathcal{S}_- \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$ khi và chỉ khi với mỗi số tự nhiên m có

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^m |D^\beta \varphi_k(x) - D^\beta \varphi(x)| = 0, \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n,$$

hay

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^m \sum_{|\beta|\le m} |D^\beta \varphi_k(x) - D^\beta \varphi(x)| = 0.$$

Một dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ trong $S(\mathbb{R}^n)$ được gọi là dãy Cauchy trong $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nếu một trong các trường hợp sau xảy ra

- $\lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ l\to\infty}} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^m |D^\beta \varphi_k(x) - D^\beta \varphi_l(x)| = 0, \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n,$
- $\lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ l\to\infty}} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^m \sum\limits_{|\beta|\le m} |D^\beta \varphi_k(x) - D^\beta \varphi_l(x)| = 0.$

Chú ý rằng, nếu dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ trong $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mà $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} (1+\|x\|^2)^m \sum_{|\beta|\le m} |D^\beta \varphi_m(x)| = 0$ thì $\mathcal{S}_- \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0$, nhưng điều ngược lại không đúng.
Chẳng hạn, trên $\mathbb{R}$ hàm $e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ và

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1 + 0 + (-x^2) + 0 + \frac{1}{2!}(-x^2)^2 + \ldots \\ &= 1 + \frac{D^1(e^{-x^2})(0)}{1!}x + \frac{D^2(e^{-x^2})(0)}{2!}x^2 + \frac{D^3(e^{-x^2})(0)}{3!}x^3 + \frac{D^4(e^{-x^2})(0)}{4!}x^4 + \ldots \end{aligned}$$

nên $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{2m}\frac{1}{2m}|D^{2m}(e^{-x^2})| \geq \frac{(2m-1)!}{m!}$ và $\mathcal{S}_-\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}e^{-x^2}=0$.
2. Khái niệm hội tụ trong $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ là phù hợp với cấu trúc tuyến tính trên đó nghĩa là với mỗi $\lambda,\mu\in\mathbb{C},\varphi_k,\psi_k,\varphi,\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), k=1,2,\ldots$

$$\text{nếu } \mathcal{S}_-\lim_{k\to\infty}\varphi_k=\varphi, \mathcal{S}_-\lim_{k\to\infty}\psi_k=\psi \text{ thì } \mathcal{S}_-\lim_{k\to\infty}(\lambda\varphi_k+\mu\psi_k)=\lambda\varphi+\mu\psi.$$

3. Nếu $a(.)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sao cho với mỗi $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$ có một số thực $m=m(\alpha)$, và một số dương $c=c(\alpha)$ có $|D^\alpha a(x)|<c(1+\|x\|)^m$, thì ánh xạ biến mỗi φ thành $a\varphi$ là ánh xạ tuyến tính liên tục từ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vào $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Với mỗi $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$, phép toán đạo hàm D^α là ánh xạ tuyến tính liên tục từ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vào $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
4. Tập $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ trù mật trong không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Thật vậy, với mỗi số tự nhiên k hình cầu đóng $\bar{B}_1(0)$ là tập compact trong $\mathbb{R}^n$ nên theo Mệnh đề1.3 có một hàm $\psi\in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ mà $\psi(x)=1, x\in\bar{B}_1(0)$ và $\operatorname{supp}\psi_k\subset B_2(0)$. Đặt $\psi_k(x)=\psi(\frac{1}{k}x),\ \varphi_k=\psi_k\varphi$ có

$$D^\beta\varphi_k(x)=D^\beta(\psi_k\varphi)(x)=\psi_k(x)D^\beta\varphi(x)+\frac{1}{k}\sum_{\substack{1\leq|\gamma|\\ \gamma\leq\beta}}\frac{1}{k^{|\gamma|-1}}D^\gamma\psi(\frac{1}{k}x)D^{\beta-\gamma}\varphi(x).$$

nên $\mathcal{S}_-\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k=\varphi$.
5. Cho $\varphi_k,\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n), k=1,2,\ldots$, và $\mathcal{D}_-\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k=\varphi$ thì $\mathcal{S}_-\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k=\varphi$. Do đó, ta có phép nhúng liên tục $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Cho $\varphi_k,\varphi\in S(\mathbb{R}^n), k=1,2,\ldots$, và $\mathcal{S}_-\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k=\varphi$ thì $\mathcal{E}_-\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k=\varphi$. Do đó, ta có phép nhúng liên tục $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Ví dụ 21. Trên $\mathbb{R}$, hàm $\rho:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ được xác định như sau

$$\rho(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{nếu } |x|<1,\\ 0 & \text{nếu } |x|\leq 1,\end{cases}$$

và $\rho_{((k))}(x)=\frac{\rho(x-k)}{(1+|x|^2)^k}$, thì $\rho,\rho_{((k))}\in C^\infty_0(\mathbb{R})$ và

- $\mathcal{S}_-\lim\limits_{k\to\infty}\rho_{((k))}=0$,
- không có giới hạn $\mathcal{D}_-\lim\limits_{k\to\infty}\rho_{((k))}$.

Định lý 1.15. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *là không gian đầy đủ,*

Chứng minh. Lấy $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy Cauchy trong $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ có

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ l\to\infty}}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|D^\alpha\varphi_k(x)-D^\alpha\varphi_l(x)|=0,$$

nên dãy $\{D^\alpha\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ hội tụ đều trên từng compact trong $\mathbb{R}^n$ đến một hàm $\varphi^{(\alpha)}$.
Dễ dàng chứng minh $\varphi=\varphi^{(0)}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ và $D^\alpha\varphi^{(0)}=\varphi^{(\alpha)}$.
Ta còn phải chứng minh

(i) với mỗi $m \in \mathbb{Z}_+, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ có $(1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi(x)| \le C_{m,\beta}, \forall x \in \mathbb{R}^n$,

(ii) với mỗi $m \in \mathbb{Z}_+, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ có $\lim\limits_{k\to\infty} \sup_{\mathbb{R}^n}(1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi_k(x) - D^\beta\varphi(x)| = 0$.

Với mỗi $\epsilon > 0, m \in \mathbb{Z}_+, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, có một số tự nhiên k_0 sao cho với mỗi $k \ge k_0, l \ge k_0$ ta có

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi_k(x) - D^\beta\varphi_l(x)| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Do $\varphi_{k_0} \in S(\mathbb{R}^n)$ nên $(1+||x||^2)^{m+1}|D^\beta\varphi_{k_0}(x)| \le C_{m,\beta}$ nên với $R_0 > \sqrt{\dfrac{2C_{m,\beta}}{\epsilon}}$ sao cho

$$(1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi_{k_0}(x)| < \frac{\epsilon}{4}, \forall ||x|| > R_0.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}(1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi_k(x)| &< (1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi_{k_0}(x)| + (1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi_k(x) - D^\beta\varphi_{k_0}(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{2}, \forall k \ge k_0, \forall ||x|| > R_0.\end{aligned}$$

Lại có do $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{||x||\le R_0}|D^\beta\varphi_k(x) - D^\beta\varphi(x)| = 0$ nên có một số $k_1 > k_0$ sao cho với mỗi $k \ge k_1$ có

$$\sup_{||x||\le R_0}|D^\beta\varphi_k(x) - D^\beta\varphi(x)| < \frac{\epsilon}{(1+R_0^2)^m}$$

do đó

$$\sup_{||x||\le R_0}(1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi_k(x) - D^\beta\varphi(x)| < \epsilon.$$

Với $||x|| > R_0$, do $\lim\limits_{k\to\infty}|D^\beta\varphi_k(x) - D^\beta\varphi(x)| = 0$ nên có một số $k(x) > k_0$ sao cho

$$(1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi_{k(x)}(x) - D^\beta\varphi(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

do đó với mỗi $k \ge k_0$ có

$$\begin{aligned}(1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi_k(x) - D^\beta\varphi(x)| <&(1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi_k(x)| + (1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi_{k(x)}(x)| \\ &+ (1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi_{k(x)}(x) - x^\alpha D^\beta\varphi(x)| \\ <&\frac{3\epsilon}{2},\end{aligned}$$

và

$$(1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi(x)| < (1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi(x) - D^\beta\varphi_{k(x)}(x)| + (1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi_{k(x)}(x)| < \epsilon.$$

Như vậy, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}(1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi(x)| \le \max\{\epsilon, \max_{||x||\le R_0}(1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi(x)|\} < +\infty$, với mỗi $\epsilon > 0, m \in \mathbb{Z}_+, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ đều có và có một số tự nhiên k_0 để với mỗi $k \ge k_0$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+||x||^2)^m|D^\beta\varphi_k(x) - D^\beta\varphi(x)| < \epsilon$$

hay $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ và $\mathcal{S}_-\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k = \varphi$. $\square$

1.4.2 Không gian các hàm suy rộng tăng chậm $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Định nghĩa 1.12. Cho hàm suy rộng $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Hàm suy rộng f được gọi là hàm suy rộng tăng chậm nếu có một số tự nhiên m và một số dương c sao cho

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq c \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+||x||^2)^m \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha\varphi(x)|, \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Không gian các hàm suy rộng tăng chậm $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ là tập tất cả các hàm suy rộng tăng chậm.

Chú ý. 1. Không gian các hàm suy rộng tăng chậm $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ là đóng đối với các phép toán tuyến tính, phép nhân với một hàm $a(.) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mà với mỗi $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ đều có một số thực m và một số dương c để $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha a(x)| \leq c(1+||x||^2)^m$, và phép lấy đạo hàm suy rộng D^α.

Ví dụ 22. Cho $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ sao cho

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+||x||)^N} dx < +\infty,$$

với $N > 0$ nào đó thì nó tương ứng với hàm suy rộng tăng chậm.
Như vậy, với $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ thì f cũng tương ứng với hàm suy rộng tăng chậm vì

- với $p = 1$ chọn $N = 0$, còn với $p = \infty$ chọn $N = n + 1$,
- với $1 < p < \infty$ theo bất đẳng thức Holder có

  $$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+||x||)^N} dx < \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+||x||)^{p'N}} dx\Big)^{\frac{1}{p'}}$$

  nên ta chọn $N = \frac{n+1}{p'}$.

Hay hàm $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ sao cho có một số thực m và một số dương c để

$$|f(x)| \leq c(1+||x||)^m$$

thì nó cũng tương ứng với một hàm suy rộng tăng chậm.

Ví dụ 23. Trên $\mathbb{R}$, $f(x) = D\cos(e^{x^2}) = -2xe^{x^2}\sin(e^{x^2})$ là hàm suy rộng tăng chậm.

Ví dụ 24. Trên $\mathbb{R}$, $f(x) = e^{|x|^3}$ là hàm khả tích địa phương nhưng không là hàm suy rộng tăng chậm.

Định lý 1.16 (Định nghĩa khác về hàm suy rộng tăng chậm). *(i) Cho hàm suy rộng tăng chậm $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Khi đó, ta có thể thác triển f thành phiếm hàm tuyến tính liên tục từ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vào $\mathbb{C}$.*

(ii)Với mỗi phiếm hàm tuyến tính liên tục $f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ đều có thu hẹp trên $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ là một hàm suy rộng tăng chậm.

Nhận xét. Từ Định lý 1.16 ta có thể coi hàm suy rộng tăng chậm là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, không gian các hàm suy rông tăng chậm $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ là không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Chứng minh. (i) Giả sử $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, nghĩa là $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ và có một số tự nhiên m và số dương C sao cho

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq c \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^m \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha \varphi(x)|, \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Do tập $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ trù mật trong $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nên với mỗi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ đều có một dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ trong $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sao cho $\varphi = \mathcal{S}_- \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k$. Khi đó

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ l\to\infty}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leq m} (1 + ||x||^2)^m |D^\alpha \varphi_k(x) - D^\alpha \varphi_l(x)| = 0$$

do đó $\{\langle f, \varphi_k\rangle\}_{k=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$ hay có một số phức, ký hiệu $\langle f, \varphi\rangle$ sao cho $\langle f, \varphi\rangle = \lim\limits_{k\to\infty} \langle f_k, \varphi_k\rangle$.

Trước tiên, ta chứng minh số $\langle f, \varphi\rangle$ không phụ thuộc vào việc chọn dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, nghĩa là nếu có hai dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty, \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ trong $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mà $\varphi = \mathcal{S}_- \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \mathcal{S}_- \lim\limits_{k\to\infty} \psi_k$ thì

$$\lim_{k\to} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leq m} (1 + ||x||^2)^m |D^\alpha \varphi_k(x) - D^\alpha \psi_k(x)| = 0$$

do đó $\lim\limits_{k\to\infty} \langle f, \varphi_k - \psi_k\rangle = 0$ hay $\lim\limits_{k\to\infty} \langle f, \varphi_k\rangle = \lim\limits_{k\to\infty} \langle f, \psi_k\rangle$.

Như vậy với mỗi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ có một tương ứng, ký hiệu f, với một số phức $\langle f, \varphi\rangle$. Dễ thấy tương ứng f là ánh xạ tuyến tính từ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vào $\mathbb{C}$ và với mỗi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ có

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^m \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha \varphi(x)|,$$

hay f liên tục.

Như vậy, với mỗi $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ đều có thác triển liên tục lên $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Giả sử $f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ là phiếm hàm tuyến tính liên tục. Ta sẽ chứng minh rằng hạn chế của f trên $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ là hàm suy rộng tăng chậm bằng phản chứng nghĩa là với mỗi số tự nhiên m đều có hàm $\varphi_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ mà

$$|\langle f, \varphi_m\rangle| > m \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^m \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha \varphi_m(x)|,$$

Đặt $\psi_m(x) = \frac{1}{\sqrt{m} \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n} (1+||y||^2)^m \sum\limits_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha \varphi_m(y)|} \varphi_m(x)$ có

$$\psi_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}_- \lim_{m\to\infty} \varphi_m = 0,$$
$$\langle f, \psi_m\rangle \geq \sqrt{m},$$

nên f không liên tục tại 0. Trái với giả thiết. Do đó, ta có điều phải chứng minh. □

1.4.3 Sự hội tụ trong không gian các hàm suy rộng tăng chậm $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Định nghĩa 1.13. Cho $f_k, f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), k = 1, 2, \dots$. Dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ được gọi là hội tụ trong $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ đến f, viết $\mathcal{S}'\_\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$, nếu

(i) có một số tự nhiên m và một số dương C sao cho

$$|\langle f_k, \varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1 + ||x||^2)^m \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha\varphi(x)|, \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), k = 1, 2, \dots,$$

(ii) dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là hội tụ trong $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ đến f.

Chú ý. 1. Khái niệm hội tụ trong $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ là phù hợp với cấu trúc tuyến tính trên đó, nghĩa là với $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, f_k, f, g_k, \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), k = 1, 2, \dots$, có

$$\text{nếu } \mathcal{S}'\_\lim_{k\to\infty} f_k = f, \mathcal{S}'\_\lim_{k\to\infty} g_k = g \text{ thì } \mathcal{S}'\_\lim_{k\to\infty}(\lambda f_k + \mu g_k) = \lambda f + \mu g.$$

Một dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ được gọi là dãy Cauchy trong $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ nếu

(i) có một số tự nhiên m và một số dương C sao cho

$$|\langle f_k, \varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1 + ||x||^2)^m \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha\varphi(x)|, \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), k = 1, 2, \dots,$$

(ii) dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là Cauchy trong $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

2. Nếu $a(.) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sao cho với mỗi $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ có một số thực $m = m(\alpha)$, và một số dương $c = c(\alpha)$ có $|D^\alpha a(x)| < c(1 + \|x\|)^m$, thì ánh xạ biến mỗi f thành af là ánh xạ tuyến tính liên tục từ $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vào $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Với mỗi $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, phép toán đạo hàm D^α là ánh xạ tuyến tính liên tục từ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vào $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
3. Có các phép nhúng liên tục $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Ví dụ 25. Cho $\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{||x||^2}{2}}$. Đặt $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\epsilon}), \epsilon > 0$, thì $\varphi_\epsilon, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, và $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$,

$$\lim_{\epsilon\to 0_+} \int_{||x||>R\sqrt{\epsilon}} \varphi_\epsilon(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0_+} \int_{||x||>\frac{R}{\sqrt{\epsilon}}} \varphi(x)dx = 0$$

nên $\mathcal{S}'\_\lim\limits_{\epsilon\to 0_+} \varphi_\epsilon = \delta$.

Định lý 1.17. *$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ là không gian đầy đủ.*

Chứng minh. Lấy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ nghĩa là

(i) có một số tự nhiên m và một số dương C sao cho

$$|\langle f_k, \varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1 + ||x||^2)^m \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha\varphi(x)|, \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), k = 1, 2, \dots,$$

(ii) dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là Cauchy trong $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Do $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ là không gian đầy đủ nên có một hàm suy rộng $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sao cho $\mathcal{D}'_{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$. Ta chỉ còn phải chứng minh $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ hay có một số tự nhiên m và một số dương C sao cho

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+||x||^2)^m \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha \varphi(x)|, \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Thật vậy, do với mỗi $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ có $\lim\limits_{k\to\infty}\langle f_k, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ và

$$|\langle f_k, \varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+||x||^2)^m \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha \varphi(x)|, \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), k = 1, 2, \dots,$$

nên

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+||x||^2)^m \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha \varphi(x)|, \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

□

Định lý 1.18 (Định nghĩa khác về sự hội tụ trong $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$). *Cho $f_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Khi đó, dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ khi và chỉ khi với mỗi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dãy $\{\langle f_k, \varphi\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$.*

Để chứng minh định lý ta cần đến Bổ đề sau.

Bổ đề 1.19. *Cho $f_k : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, k = 1, 2, \dots,$ là các phiếm hàm tuyến tính liên tục sao cho dãy $\{\langle f_k, \varphi\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$ với mỗi $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)$; dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ trong $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sao cho $\mathcal{S}_{-}\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0$. Khi đó, $\lim\limits_{k\to\infty}\langle f_k, \varphi_k\rangle = 0$.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử dãy $\{\langle f_k, \varphi_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ không hội tụ tới 0 khi $k \to \infty$, nghĩa là có một số dương c và một dãy con, để đơn giản ký hiệu ta giả sử

$$|\langle f_k, \varphi\rangle| > c, k = 1, 2, \dots.$$

Do $\mathcal{S}_{-}\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0$ nên có một dãy con, để đơn giản ký hiệu ta có thể giả sử

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+||x||^2)^m |D^\alpha \varphi_k(x)| \leq \frac{1}{4^k}, \max\{m, |\alpha|\} \leq k, k = 1, 2, \dots.$$

Đặt $\psi_k(x) = 2^k \varphi_k(x)$ có

- $\mathcal{S}_{-}\lim\limits_{k\to\infty} \psi_k = 0,$
- $\lim\limits_{k\to\infty} |\langle f_k, \psi_k\rangle| = +\infty.$

Ta đi xây dựng dãy $\{f'_k, \psi'_k\}_{k=1}^{\infty}$ bằng cách quy nạp như sau.
Do $\lim\limits_{l\to\infty}\langle f_l, \psi_l\rangle = +\infty$ nên có một số tự nhiên l_1 sao cho $|\langle f_{l_1}, \varphi_{l_1}\rangle| > 1$.
Đặt $f'_1 = f_{l_1}, \psi'_1 = \psi_{l_1}$.
Do $\mathcal{S}_-\lim\limits_{l\to\infty}\psi_l = 0$ nên có một số tự nhiên $k_1 > l_1$ sao cho $|\langle f'_1, \psi_l\rangle| < 1, \forall l \geq k_1$. Mà dãy $\{\langle f_l, \psi'_1\rangle\}_{l=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy nên bị chặn, còn $\lim\limits_{l\to\infty}\langle f_l, \psi_l\rangle = +\infty$ nên có một số tự nhiên $l_2 > k_1$ sao cho $|\langle f_l, \psi_l\rangle| > |\langle f_l, \psi'_1\rangle| + 1, \forall l \geq l_2$.
Đặt $f'_2 = f_{l_2}, \psi'_2 = \psi_{l_2}$. Có

(i)$|\langle f'_1, \psi'_2\rangle < \frac{1}{2}$,

(ii)$|\langle f'_2, \psi'_2\rangle| > |\langle f'_2, \psi'_1\rangle| + 1$.

Giả sử ta đã có $f'_1, \dots, f'_{k-1}, \psi'_1, \dots, \psi_{k-1}(k > 2, f'_j = f_{l_j}, l_1 < l_2 < \cdots < l_{k-1})$ mà

(i)$|\langle f'_j, \psi'_{k-1}\rangle| < \frac{1}{2^{k-1-j}}, j = 1, \dots, k-2$,

(ii)$|\langle f'_{k-1}, \psi'_{k-1}\rangle| > \sum_{j=1}^{k-2}|\langle f'_{k-1}, \psi'_j\rangle| + k - 1$.

Do $\mathcal{S}_-\lim\limits_{l\to\infty}\psi_l = 0$ nên có một số tự nhiên $k_2 > l_{k-1}$ sao cho

$$|\langle f'_j, \psi_l\rangle| < \frac{1}{2^{l-j}}, j = 1, \dots, k-2, \forall l \geq k_2.$$

Mà với mỗi $j = 1, \dots, k-2$, dãy $\{\langle f_l, \psi'_j\rangle\}_{l=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy nên bị chặn, còn $\lim\limits_{l\to\infty}\langle f_l, \psi_l\rangle = +\infty$ nên có một số tự nhiên $l_k > k_2$ sao cho

$$|\langle f_l, \psi_l\rangle| > \sum_{j=1}^{k-2}|\langle f_l, \psi'_j\rangle| + k, \forall l \geq l_k.$$

Đặt $f'_k = f_{l_k}, \psi'_k = \psi_{l_k}$. Có

(i)$|\langle f'_j, \psi'_k\rangle| < \frac{1}{2^{k-j}}, j = 1, \dots, k-1$,

(ii)$|\langle f'_k, \psi'_k\rangle| > \sum_{j=1}^{k-1}|\langle f'_k, \psi'_j\rangle| + k$.

Có dãy $\{\psi'_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\psi_{l_k}\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy con của dãy $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ mà $\psi_k = 2^k\varphi_k$ nên với mỗi $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, m, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+, m_2 > m_1 > \max\{m, |\alpha|\}$ có

$$\begin{aligned}\sum_{k=m_1}^{m_2}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+||x||^2)^m|D^\alpha\psi'_k(x)| &= \sum_{k=m_1}^{m_2}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+||x||^2)^m|D^\alpha\psi_{l_k}(x)|\\ &< \sum_{k=m_1}^{m_2}\frac{1}{2^{l_k}}\\ &\leq \sum_{k=m_1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m_1-1}}.\end{aligned}$$

Do đó, dãy $\{\sum_{l=1}^{k}\psi'_l\}_{k=1}^{\infty}$ hội tụ trong $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nghĩa là có một hàm $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mà

$$\psi = \mathcal{S}\_\lim_{k\to\infty}\sum_{l=1}^{k}\psi'_l.$$

Khi đó, có

$$|\langle f'_k, \psi\rangle| \geq |\langle f'_k, \psi'_k\rangle| - \sum_{j=1}^{k-1}|\langle f'_k, \psi'_j\rangle| - \lim_{l\to\infty}\sum_{j=k+1}^{l}|\langle f'_k, \psi'_j\rangle|$$
$$\geq k - \lim_{l\to\infty}\sum_{j=k+1}^{l}\frac{1}{2^{j-k}} = k-1,$$

nghĩa là, dãy $\{\langle f'_k, \psi\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ là không bị chặn, do đó cũng không là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$. Điều này trái với giả thiết. Như vậy điều giả sử sai hay ta có điều phải chứng minh. □

Chứng minh. Bây giờ ta chứng minh Định lý 1.18.
Trước tiên ta chứng minh điều kiện cần. Giả sử dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ nghĩa là

(i) có một số tự nhiên m và một số dương C sao cho

$$|\langle f_k, \varphi\rangle| \leq C\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+||x||^2)^m\sum_{|\alpha|\leq m}|D^\alpha\varphi(x)|, \forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), k=1,2,\ldots,$$

(ii) dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là Cauchy trong $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Theo Định lý 1.16 các hàm suy rộng f_k có thể thác triển lên thành phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ và

$$|\langle f_k, \varphi\rangle| \leq C\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+||x||^2)^m\sum_{|\alpha|\leq m}|D^\alpha\varphi(x)|, \forall\varphi\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), k=1,2,\ldots.$$

Lấy $\epsilon > 0$. Do tập $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ trù mật trong $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nên với mỗi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ có một hàm $\varphi_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sao cho

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+||x||^2)^m\sum_{|\alpha|\leq m}|D^\alpha\varphi(x) - D^\alpha\varphi_\epsilon(x)| \leq \frac{\epsilon}{2C}.$$

Do dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là Cauchy trong $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ nên có một số tự nhiên k_0 sao cho với mọi $k, l \geq k_0$ có

$$|\langle f_k - f_l, \varphi_\epsilon\rangle| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Do đó với mỗi $\epsilon > 0$ đều có một số tự nhiên k_0 để $k, l \geq k_0$

$$|\langle f_k - f_l, \varphi\rangle| \leq |\langle f_k - f_l, \varphi_\epsilon - \varphi\rangle| + |\langle f_k - f_l, \varphi_\epsilon\rangle|$$
$$\leq C\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+||x||^2)^m\sum_{|\alpha|\leq m}|D^\alpha\varphi(x) - D^\alpha\varphi_\epsilon(x)| + \frac{\epsilon}{2}$$
$$\leq \epsilon$$

hay với mỗi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dãy $\{\langle f_k, \varphi\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$.
Ta chứng minh điều kiện đủ. Giả sử với mỗi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dãy $\{\langle f_k, \varphi\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$. Do $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$ nên dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
Ta chỉ còn phải chứng minh có một số tự nhiên m và một số dương C sao cho

$$|\langle f_k, \varphi\rangle| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^m \sum_{|\alpha| \leq m} |D^{\alpha}\varphi(x)|, \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n), k = 1, 2, \dots .$$

Ta chứng minh bằng phản chứng, nghĩa là với mỗi số tự nhiên m đều có một hàm $\varphi_m \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ để

$$|\langle f_m, \varphi_m\rangle| > m \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^m \sum_{|\alpha| \leq m} |D^{\alpha}\varphi_m(x)|, \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Đặt $\psi_m(x) = \frac{1}{\sqrt{m} \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^n} (1+||y||^2)^m \sum\limits_{|\alpha| \leq m} |D^{\alpha}\varphi_m(y)|}\varphi_m(x)$ có

$$\psi_m \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}_{-} \lim_{m \to \infty} \varphi_m = 0,$$
$$\langle f_m, \psi_m\rangle \geq \sqrt{m},$$

mà theo Bổ đề 1.19 thì $\lim\limits_{k \to \infty} \langle f_m, \varphi_m\rangle = 0$. Như vậy xảy ra điều mâu thuẫn. Do đó ta có điều phải chứng minh. $\square$