Chương 3

Không gian Sobolev

3.1 Định nghĩa và một số tính chất

3.1.1 Không gian Sobolev cấp nguyên không âm

Cho Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Cho $f \in L^2(\Omega)(\subset L^2_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega))$, khi đó f có thể coi như một hàm suy rộng được xác định như sau

$$\varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Từ bất đẳng thức Cauchy- Schwartz có đánh giá

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \Big(\int_\Omega |f(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega |\varphi(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.1}$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (3.1) là điều kiện cần và đủ để một hàm suy rộng là một hàm trong $L^2(\Omega)$. Với chú ý, không gian đối ngẫu (gồm các phiếm hàm tuyến tính liên tục) của $L^2(\Omega)$ cũng là $L^2(\Omega)$ nên ta sẽ phát biểu Mệnh đề dưới dạng sau.

Mệnh đề 3.1. *(i) Cho $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Nếu có một số dương C sao cho*

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C(\int_\Omega |\varphi(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{3.2}$$

thì ta có thể thác triển f lên thành một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $L^2(\Omega)$.
(ii) Cho $f \in L^2(\Omega)$. Khi đó, thu hẹp của f trên $\mathcal{D}(\Omega)$ là một hàm suy rộng thoả mãn bất đẳng thức (3.2) *với hằng số $C = ||f||_{L^2}$.*

Chứng minh. (i) Do $C_0^\infty(\Omega)$ trù mật trong $L^2(\Omega)$ nên nếu hàm suy rộng f thoả mãn bất đẳng thức (3.2) thì ta có thể thác triển f lên thành phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $L^2(\Omega)$. Thác triển này là thác triển duy nhất.
(ii) Phần này được chứng minh từ bất đẳng thức Cauchy- Schwartz. □

Chú ý. Như vậy, ta có thể coi $L^2(\Omega)$ là không gian tất cả các hàm suy rộng thoả mãn bất đẳng thức (3.1), với chú ý $f, g \in L^2(\Omega)$ bằng nhau theo nghĩa suy rộng khi và chỉ khi bằng nhau trong $L^2(\Omega)$.

Nếu coi một hàm bình phương khả tích là một hàm suy rộng thì sự hội tụ theo nghĩa suy rộng chính là sự hội tụ yếu. Sự hội tụ yếu này không dẫn đến sự hội tụ trong $L^2(\Omega)$ ngay cả khi thêm cả tính bị chặn đều. Chẳng hạn, ta xét ví dụ sau trên đường thẳng $\mathbb{R}$, lấy $f_k(x) = \chi_{[k,k+1]}(x)$ hội tụ yếu về 0 khi k tiến ra vô cùng vì với mỗi $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ có một số $k_0 \in \mathbb{N}$ để $\operatorname{supp}\varphi \subset [-k_0, k_0]$, nên $\int_{\mathbb{R}} \chi_{[k,k+1]}(x)\varphi(x) = 0$, với $k > k_0$. và $||\chi_{[k,k+1]}||_{L^2} = 1, k = 1, 2, \ldots$, nên dãy $\{\chi_{[k,k+1]}\}_{k=1}^{\infty}$ không hội tụ trong $L^2(\mathbb{R})$.

Khác với các không gian hàm suy rộng khác, nếu $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{S}', \mathcal{E}', \mathcal{E}, \mathcal{S}, \mathcal{D})$ thì $D^\alpha f \in \mathcal{D}'(\mathcal{S}', \mathcal{E}', \mathcal{E}, \mathcal{S}, \mathcal{D}), \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, một cách tương ứng; nếu $f \in L^2(\Omega)$ thì chưa chắc $Df \in L^2(\Omega)$, ngay cả khi f có đạo hàm suy rộng cấp cao hơn nằm trong $L^2(\Omega)$.

Chẳng hạn, trên $\Omega = [-1, 1]$, hàm Heaviside $H(t) \in L^2(-1, 1)$ nhưng $DH = \delta \notin L^2(-1, 1)$. Hoặc hàm dấu $\operatorname{sgn}(t) \in L^2(-1, 1)$ nhưng $D\operatorname{sgn}(t) \notin L^2(-1, 1)$ vì giả sử không phải thì

$$\int_{-1}^{1} D\operatorname{sgn}(t)\varphi(t)dt = -\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(t)D\varphi(t)dt = -\int_{0}^{1} D\varphi(t)dt + \int_{-1}^{0} D\varphi(t)dt$$
$$= 2\varphi(0), \varphi \in C_0^\infty(-1, 1) \tag{3.3}$$

nên với $\operatorname{supp}\varphi \subset (0, 1)$ thì $D\operatorname{sgn}(t) = 0, h.k.n$ trên $(0, 1)$,
với $\operatorname{supp}\varphi \subset (-1, 0)$ thì $D\operatorname{sgn}(t) = 0, h.k.n$ trên $(-1, 0)$,
do đó $D\operatorname{sgn}(t) = 0, h.k.n(-1, 1)$. Điều này mâu thuẫn với phương trình (3.3) khi $\varphi(0) \neq 0$.

Trên hình tròn $B_1(0) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ |x_1|^2 + |x_2^2| = 1\}$ trong mặt phẳng, hàm $f(x) = \operatorname{sgn}(x_1) + \operatorname{sgn}(x_2)$ có đạo hàm suy rộng $D_1 f, D_2 f \notin L^2(B_1(0))$ còn $D_1 D_2 f = 0 \in L^2(B_1(0))$.

Nhưng cũng cần chú ý rằng với Ω có hình học đủ tốt, nếu $f \in L^2(\Omega), D^\alpha f \in L^2(\Omega)$, với mọi đa chỉ số α mà $|\alpha| = l$ thì $D^\alpha f \in L^2(\Omega)$, với mọi đa chỉ số α mà $|\alpha| \leq l$. Trong ví dụ trên thì chỉ có $D_1 D_2 f = 0 \in L^2(B_1(0))$ còn $D_1^2 f, D_2^2 f \notin L^2(B_1(0))$.

Định nghĩa 3.1. Cho $l \in \mathbb{Z}_+$. Không gian Sobolev $W^{l,2}(\Omega) = W^l(\Omega)$ là không gian bao gồm các hàm suy rộng $f \in L^2(\Omega)$ mà các đạo hàm suy rộng $D^\alpha f \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq l$, với chuẩn

$$||f||_{W^l(\Omega)} = ||f||_l = \Big(\sum_{|\alpha| \leq l} \int_\Omega |D^\alpha f|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Không gian Sobolev $W_0^l(\Omega)$ là bao đóng của tập $C_0^\infty(\Omega)$ trong $W^l(\Omega)$.

Nhận xét. Chuẩn $||.||_l$ thực sự là một chuẩn, nghĩa là nó thoả mãn ba tiên đề về chuẩn

- (xác định dương) $||f||_l \geq 0, \forall f \in W^l(\Omega)$ và $||f||_l = 0$ khi và chỉ khi $f = 0$,
- (thuần nhất) $||\lambda f||_l = |\lambda|\,||f||_l, \forall f \in W^l(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{C}$,
- (bất đẳng thức tam giác) $||f + g||_{W^l(\Omega)} \leq ||f||_{W^l(\Omega)} + ||g||_{W^l(\Omega)}, \forall f, g \in W^l(\Omega)$.

Chuẩn này được sinh ra bởi tích vô hướng

$$\langle f, g\rangle_l = \sum_{|\alpha|\le l}\int_\Omega D^\alpha f(x)\overline{D^\alpha g(x)}dx,$$

vì

- (xác định dương) $\langle f, f\rangle_l = ||f||_l^2 \ge 0$, và $\langle f, f\rangle_l = 0$ khi và chỉ khi $f = 0$,
- (phản đối xứng) $\langle f, g\rangle_l = \overline{\langle g, f\rangle}_l, \forall f, g \in W_l(\Omega)$,
- (tuyến tính theo biến thứ nhất)
  $\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g\rangle_l = \alpha_1\langle f_1, g\rangle_l + \alpha_2\langle f_2, g\rangle_l, \forall f_1, f_2, g \in W_l(\Omega), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.

Ngoài ra $|\langle f, g\rangle_l| \le ||f||_l||g||_l$, và $||f+g||_l^2 + ||f-g||_l^2 = 2(||f||_l^2 + ||g||_l^2)$, với mọi $f, g \in W_l(\Omega)$.

Mệnh đề 3.2. *Không gian $W_l(\Omega)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng $\langle ., .\rangle_l$.*

Chứng minh. Từ nhận xét trên, ta chỉ cần chứng minh tính đầy đủ của không gian $W_l(\Omega)$ theo chuẩn $||.||_l$. Lấy dãy Cauchy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ trong $W_l(\Omega)$, nghĩa là các dãy $\{D^\alpha f_k\}_{k=1}^\infty$ là Cauchy trong $L^2(\Omega)$, với $|\alpha| \le l$. Do $L^2(\Omega)$ là không gian đầy đủ nên với mỗi đa chỉ số α mà $|\alpha| \le l$ đều tồn tại $f^\alpha \in L^2(\Omega)$ mà $\lim\limits_{k\to\infty} ||D^\alpha f_k - f^\alpha||_{L^2(\Omega)} = 0$.
Nếu ta chứng minh được $D^\alpha f^0 = f^\alpha, |\alpha| \le l$ thì $\lim\limits_{k\to\infty} ||f_k - f^0||_l = 0$ hay dãy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ hội tụ đến f^0 trong $W_l(\Omega)$. Do đó, $W_l(\Omega)$ là đầy đủ.
Để chứng minh $D^\alpha f^0 = f^\alpha$ ta chứng minh chúng bằng nhau theo nghĩa suy rộng. Lấy $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), k = 1, 2, \dots,$ có

$$|\langle D^\alpha f^0 - f^\alpha, \varphi\rangle| \le |\langle D^\alpha f^0 - D^\alpha f_k, \varphi\rangle| + |\langle D^\alpha f_k - f^\alpha, \varphi\rangle|$$

mà

$$|\langle D^\alpha f^0 - D^\alpha f_k, \varphi\rangle| = |\langle f^0 - f_k, D^\alpha\varphi\rangle| \le ||f^0 - f_k||_{L^2(\Omega)}||D^\alpha\varphi||_{L^2(\Omega)}$$
$$|\langle D^\alpha f^k - f^\alpha, \varphi\rangle| \le ||D^\alpha f^k - f^\alpha||_{L^2(\Omega)}||\varphi||_{L^2(\Omega)}$$

và $\lim\limits_{k\to\infty} ||D^\beta f_k - f^\beta||_{L^2(\Omega)} = 0, \forall|\beta| \le l$,
nên $\langle D^\alpha f^0 - D^\alpha f_k, \varphi\rangle = 0$ hay $D^\alpha f^0 = f^\alpha$. □

Hệ quả 3.3. *Không gian $W_0^l(\Omega)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng $\langle ., .\rangle_l$.*

Từ định nghĩa, ta có các phép nhúng liên tục sau.

Mệnh đề 3.4. *Các phép nhúng liên tục Với $l, k \in \mathbb{Z}_+, l \le k$, ta có các phép nhúng liên tục sau:*

$$W^k(\Omega) \hookrightarrow W^l(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$
$$W_0^k(\Omega) \hookrightarrow W_0^l(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Mệnh đề 3.5. *Trong trường hợp $\Omega = \mathbb{R}^n$, phiếm hàm xác định trên $W^l(\mathbb{R}^n)$ được xác định như sau*

$$||f||_{W^l} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||\xi||^2)^l |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi \Big)^{\frac{1}{2}}$$

là một chuẩn tương đương với chuẩn $||.||_l$.

Chứng minh. Lấy $f \in W^l(\mathbb{R}^n)$. Có $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq l$ nên theo tính chất của phép biến đổi Fourier trong $L^2(\mathbb{R}^n)$ thì

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha f(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha|^2 |\mathcal{F}f(\xi)| d\xi \end{aligned}$$

mà

$$c_1 (\sum_{|\alpha| \leq l} |\xi^\alpha|^2) \leq (1 + ||\xi||^2)^l \leq c_2 (\sum_{|\alpha| \leq l} |\xi^\alpha|^2),$$

với c_1, c_2 là các hằng số dương không phụ thuộc ξ nên

$$c_1 ||f||_l \leq ||f||_{W^l} \leq c_2 ||f||_l$$

do đó $||.||_l$ và $||.||_{W^l}$ là hai chuẩn tương đương trên $W_l(\mathbb{R}^n)$. □

Chú ý. Với Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$, không gian $W^l(\Omega)$ có thể coi là một không gian con của không gian $W^l(\mathbb{R}^n)$ gồm các phần tử có giá (theo nghĩa suy rộng) nằm trong Ω, còn không gian $W_0^l(\Omega)$ là bao đóng của tập $C_0^\infty(\Omega)$ trong $W^l(\mathbb{R}^n)$. Trong một số trường hợp đặc biệt, chẳng hạn Ω là nửa không gian mở hay toàn không gian, thì $W^l(\Omega) = W_0^l(\Omega)$.

3.1.2 Không gian Sobolev với cấp thực

Định nghĩa 3.2. Với $l \in \mathbb{R}$, không gian Sobolev $W^l(\mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mà biến đổi Fourier $\mathcal{F}f$ là hàm đo được và thoả mãn

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||\xi||^2)^l |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi < +\infty.$$

Nhận xét. Phiếm hàm $||f||_{W^l} = \Big(\int_{\mathbb{R}}^n (1 + ||\xi||^2)^l |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi \Big)^{\frac{1}{2}}$ xác định một chuẩn trên $W^l(\mathbb{R}^n)$ nghĩa là

- (xác định dương) $||f||_{W^l} \geq 0, \forall f \in W^l(\mathbb{R}^n)$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f = 0$,
- (thuần nhất) $||\lambda f||_{W^l} = |\lambda| \, ||f||_{W^l}, \forall f \in W^l(\mathbb{R}^n), \forall \lambda \in \mathbb{C}$,
- (bất đẳng thức tam giác) $||f + g||_{W^l} \leq ||f||_{W^l} + ||g||_{W^l}, \forall f, g \in W^l(\mathbb{R}^n)$.

Chuẩn này được sinh ra bởi tích vô hướng

$$\langle f, g\rangle_{W^l} = \sum_{|\alpha|\le l} \int_{\mathbb{R}}^{n} (1+||\xi||^2)^l \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}d\xi,$$

vì

- (xác định dương) $\langle f, f\rangle_{W^l} = ||f||^2_{W^l} \ge 0$, và $\langle f, f\rangle_l = 0$ khi và chỉ khi $f = 0$,
- (phản đối xứng) $\langle f, g\rangle_{W^l} = \overline{\langle g, f\rangle}_{W^l}, \forall f, g \in W_l(\mathbb{R}^n)$,
- (tuyến tính theo biến thứ nhất) $\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g\rangle_{W^l} = \alpha_1\langle f_1, g\rangle_{W^l} + \alpha_2\langle f_2, g\rangle_{W^l}, \forall f_1, f_2, g \in W_l(\Omega), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.

Ngoài ra $|\langle f, g\rangle_{W^l}| \le ||f||_{W^l}||g||_{W^l}$, và $||f+g||^2_{W^l} + ||f-g||^2_{W^l} = 2(||f||^2_{W^l} + ||g||^2_{W^l})$, với mọi $f, g \in W_l(\mathbb{R}^n)$.
Khi $l \in \mathbb{Z}_+$, thì theo Mệnh đề 3.5 các định nghĩa về không gian Sobolev $W^l(\mathbb{R}^n)$ là không mâu thuẫn nhau.
Ký hiệu $V^l(\mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm đo được f thoả mãn

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+||x||^2)^l |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

Khi đó, phiếm hàm $||f||_{V^l} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+||x||^2)^l |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ là một chuẩn trên $V^l(\mathbb{R}^n)$ sinh ra bởi tích vô hướng

$$\langle f, g\rangle_{V^l} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+||x||^2)^l f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Không gian $V^l(\mathbb{R}^n)$ là không gian đầy đủ, nên là không gian Hilbert.
Phép biến đổi Fourier là một đẳng cấu, đẳng cự từ $W^l(\mathbb{R}^n)$ vào $V^l(\mathbb{R}^n)$. Nên không gian Sobolev $W^l(\mathbb{R}^n)$ là không gian đầy đủ, do đó, là không gian Hilbert với tích vô hướng $\langle ., .\rangle_{W^l}$. Ngoài ra, dễ thấy các phép nhúng liên tục $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow V^l(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ nên có các phép nhúng liên tục $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^l(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Định lý 3.6 (Định lý nhúng). *(i) Với $l < k$, ta có các phép nhúng liên tục*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^k(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^l(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

(ii) Với $l < k, K$ là tập compact trong $\mathbb{R}^n$, có phép nhúng từ không gian con của $W^k(\mathbb{R}^n)$ gồm các phần tử có giá $\operatorname{supp} f \subset K$, vào không gian $W^l(\mathbb{R}^n)$ là compact.

Chứng minh. (i) Từ Định nghĩa dễ dàng có điều phải chứng minh.
(ii) Do K là một tập compact trong $\mathbb{R}^n$ nên có một hàm $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mà $\varphi(x) = 1, x \in K$.
Để chứng minh phần này, lấy một dãy $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ bị chặn trong $W^k(\mathbb{R}^n)$ mà $\operatorname{supp} f_\nu \subset K, \nu =$

$1, 2, \ldots$, ta sẽ chứng minh nó có một dãy con hội tụ, hay một dãy Cauchy, trong $W^l(\mathbb{R}^n)$. Do $\operatorname{supp} f_\nu \subset K$ nên $\varphi f_\nu = f_\nu$. Khi đó,

$$\mathcal{F} f_\nu = \mathcal{F}(\varphi f_\nu) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}\varphi * \mathcal{F} f_\nu, D^\alpha(\mathcal{F} f_\nu) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} D^\alpha(\mathcal{F}\varphi) * \mathcal{F} f_\nu.$$

Theo bất đẳng thức Peetre $(1+||\xi||^2)^{\frac{k}{2}} \leq (1+||\eta||^2)^{\frac{k}{2}}(1+||\xi-\eta||^2)^{\frac{|k|}{2}}, \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ nên

$$\begin{aligned}
&(1+||\xi||^2)^{\frac{k}{2}} |\mathcal{F} f_\nu(\xi)| \leq (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (1+||\xi-\eta||^2)^{\frac{|k|}{2}} |\mathcal{F}\varphi(\xi-\eta)| (1+||\xi||^2)^{\frac{k}{2}} |\mathcal{F} f_\nu(\eta)| d\eta \\
&\leq (2\pi)^{\frac{n}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (1+||\xi-\eta||^2)^{|k|} |\mathcal{F}\varphi(\xi-\eta)| d\eta \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (1+||\eta||^2)^k |\mathcal{F} f_\nu(\eta)|^2 d\eta \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&(1+||\xi||^2)^{\frac{k}{2}} |D^\alpha(\mathcal{F} f_\nu)(\xi)| \leq \\
&\leq (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (1+||\xi-\eta||^2)^{\frac{|k|}{2}} |D^\alpha(\mathcal{F}\varphi)(\xi-\eta)| (1+||\xi||^2)^{\frac{k}{2}} |\mathcal{F} f_\nu(\eta)| d\eta \\
&\leq (2\pi)^{\frac{n}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (1+||\xi-\eta||^2)^{|k|} |D^\alpha(\mathcal{F}\varphi)(\xi-\eta)| d\eta \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (1+||\eta||^2)^k |\mathcal{F} f_\nu(\eta)|^2 d\eta \Big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

nên dãy $\{\mathcal{F} f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ là dãy hàm bị chặn đều và liên tục đồng bậc trên từng tập compact do đó, theo Định lý Ascoli- Azela, dãy $\{\mathcal{F} f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ hội tụ đều trên từng tập compact.
Lấy một số dương ϵ tuỳ ý. Giả sử, dãy $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ bị chặn bởi C trong $W^k(\mathbb{R}^n)$.
Do $l < k$ nên $\lim\limits_{||\epsilon|| \to \infty} (1+||\xi||^2)^{l-k} = 0$, do đó có một số $R_0 > 0$ để

$$(1+||\xi||^2)^{l-k} < \frac{\epsilon^2}{8C^2} \leq \frac{\epsilon^2}{2(||f_\nu||_{W^k} + ||f_\mu||_{W^k})^2}, \forall ||\xi|| \geq R_0, \nu, \mu = 1, 2, \ldots.$$

Do dãy $\{\mathcal{F} f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ hội tụ đều trên từng tập compact nên tồn tại số $k_0 \in \mathbb{N}$ để

$$\sup_{||\xi|| \leq R_0} |\mathcal{F} f_\nu(\xi) - \mathcal{F} f_\mu(\xi)|^2 \leq \frac{\epsilon^2}{2 \int_{||\epsilon|| \leq R_0} (1+||\xi||^2)^l d\xi}, \forall \nu, \mu \geq k_0.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned}
||f_\nu - f_\mu||_{W^l}^2 = & \int_{||\xi|| \geq R_0} (1+||\xi||^2)^{l-k} (1+||\xi||^2)^k |\mathcal{F} f_\nu(\xi) - \mathcal{F} f_\mu(\xi)|^2 d\xi \\
& + \int_{||\xi|| \leq R_0} (1+||\xi||^2)^l |\mathcal{F} f_\nu(\xi) - \mathcal{F} f_\mu(\xi)|^2 d\xi \\
\leq & \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2} = \epsilon^2, \forall \nu, \mu \geq \nu_0,
\end{aligned}$$

do đó, dãy $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $W^l(\mathbb{R}^n)$. □

Định lý 3.7 (Các cách lấy xấp xỉ trong $V^l(\mathbb{R}^n), W^l(\mathbb{R}^n)$). *(i) Lấy $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mà $\psi(0) = 1$. Đặt $\psi^\delta(x) = \psi(\delta x), \delta > 0$. Khi đó, với mỗi $f \in V^l(\mathbb{R}^n)$ thì dãy $\{\psi^\delta f\}_{\delta > 0}$ hội tụ tới f trong $V^l(\mathbb{R}^n)$ khi δ giảm dần về 0.*
Từ đó, với $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mà $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) = 1$, đặt $\varphi_\delta(x) = \delta^{-n}\varphi(\frac{x}{\delta}), \delta > 0$ thì với mỗi $f \in$

$W^l(\mathbb{R}^n)$ dãy $\{\varphi^\delta * f\}_{\delta>0}$ hội tụ tới f trong $W^l(\mathbb{R}^n)$ khi δ giảm dần về 0.
(ii) Lấy $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mà $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x) = 1$. Đặt $\varphi_\delta(x) = \delta^{-n}\varphi(\frac{x}{\delta}), \delta > 0$. Khi đó, với mỗi $f \in V^l(\mathbb{R}^n)$ thì dãy $\{\varphi^\delta * f\}_{\delta>0}$ hội tụ tới f trong $V^l(\mathbb{R}^n)$ khi δ giảm dần về 0.
Với $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mà $\psi(0) = 1$ đặt $\psi^\delta(x) = \psi(\delta x), \delta > 0$. Từ đó, thì với mỗi $f \in W^l(\mathbb{R}^n)$ dãy $\{\psi^\delta f\}_{\delta>0}$ hội tụ tới f trong $W^l(\mathbb{R}^n)$ khi δ giảm dần về 0.
(iii) Tập $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ trù mật trong $V^l(\mathbb{R}^n), W^l(\mathbb{R}^n)$.

Chứng minh. (i) Lấy một số $\epsilon > 0$, do $f \in V^l(\mathbb{R}^n)$ nên tồn tại một số R_0 để

$$\int_{||x||\geq R_0}(1+||x||^2)^l|f(x)|^2dx \leq \frac{\epsilon^2}{2(\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|\psi(x)|)^2}$$

mà $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \psi^\delta(x) = \psi(\delta x)$ nên $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|\psi^\delta(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|\psi(x)| < +\infty$ do đó

$$\int_{||x||\geq R_0}(1+||x||^2)^l|(1-\psi^\delta(x))f(x)|^2dx \leq \frac{\epsilon^2}{2}. \tag{3.4}$$

Do $\psi(0) = 1$ và ψ là hàm liên tục nên có một số $\eta > 0$ để $|1-\psi(x)| \leq \frac{\epsilon^2}{2||f||^2_{V^l}}, ||x|| \leq \eta$.
Khi đó, với $0 < \delta < \frac{\eta}{R_0}$ có $|1-\psi^\delta(x)| \leq \frac{\epsilon^2}{2||f||^2_{V^l}}, ||x|| \leq R_0$, do đó

$$\int_{||x||\leq R_0}(1+||x||^2)^l|(1-\psi^\delta(x))f(x)|^2dx \leq \frac{\epsilon^2}{2}. \tag{3.5}$$

Từ các bất đẳng thức (3.4), (3.5) có

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+||x||^2)^l|(1-\psi^\delta(x))f(x)|^2dx \leq \epsilon^2, 0 < \delta < \frac{\eta}{R_0},$$

hay $\lim\limits_{\delta\to 0_+}||\psi^\delta f - f||_{V^l} = 0$.
Với $f \in W^l(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx = 1$ thì

$$\mathcal{F}f \in V^l(\mathbb{R}^n), \mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), (2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}\varphi(0) = 1, \mathcal{F}(\varphi_\delta * f)(\xi) = \big((2\pi)^{\frac{n}{2}}(\mathcal{F}\varphi)^\delta(\xi)\big)\mathcal{F}f(\xi),$$

nên theo phần trên dãy $\{\mathcal{F}(\varphi_\delta * f)\}_{\delta>0}$ hội tụ đến $\mathcal{F}f$ trong $V^l(\mathbb{R}^n)$ khi δ giảm dần về 0, hay dãy $\{\varphi_\delta * f\}_{\delta>0}$ hội tụ đến f trong $W^l(\mathbb{R}^n)$ khi δ giảm dần về 0.
Chú ý rằng, theo tính chất của phép biến đổi Fourier trong $L^2(\mathbb{R}^n)$, với $l = 0$ có $V^0(\mathbb{R}^n) = W^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$ nên với $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ thì các dãy $\{\psi^\delta f\}_{\delta>0}$ và $\{\varphi_\delta * f\}_{\delta>0}$ hội tụ đến f trong $L^2(\mathbb{R}^n)$ khi δ giảm dần về 0.
(ii) Với $0 < \delta < 1, R > 0$ thì với mỗi $x \in B_R(0)$ có

$$(f * \varphi_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_\delta(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n}(\chi_{B_{R+1}(0)}f)(y)\varphi_\delta(x-y)dy,$$

còn với $x \notin B_R(0)$ có

$$\begin{aligned}|(f * \varphi_\delta)(x)| &= |\int_{||y||\geq(R-1)} f(y)\varphi_\delta(x-y)dy| \\ &\leq \Big(\int_{||y||\geq(R-1)}|f(y)|^2|\varphi_\delta(x-y)|dy\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{||y||\geq(R-1)}|\varphi_\delta(x-y)|dy\Big)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

mà với $0 < \delta < 1$ có

$$(1+||x||^2)^l \leq (1+||x-y||^2)^{|l|}(1+||y||^2)^l, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$
$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+||x-y||^2)^{|l|}|\varphi_\delta(x-y)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}(1+||x-y||^2)^{|l|}|\varphi(x-y)|dx$$

nên
$$\int_{||x||\geq R}(1+||x||^2)^l|(f*\varphi_\delta)(x)|^2dx \leq C\int_{||x||\geq(R-1)}(1+||x||^2)^l|f(x)|^2dx$$

với $C = \Big(\int_{\mathbb{R}^n}(1+||x||^2)^{|l|}|\varphi(x)|dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|dx\Big)$.
Lấy $\epsilon > 0$ tuỳ ý. Do $f \in V^l(\mathbb{R}^n)$ nên có một số $R_0 > 1$ để

$$\int_{||x||\geq(R_0-1)}(1+||x||^2)^l|f(x)|^2dx \leq \frac{\epsilon^2}{8}.$$

Do $\chi_{B_{R_0+1}(0)}f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ nên theo Chú ý của phần trên (i) tồn tại $0 < \delta_0 < 1$ để

$$||\chi_{B_{R_0+1}(0)}f - (\chi_{B_{R_0+1}(0)}f)*\varphi_\delta||_{L^2} \leq \frac{\epsilon^2}{2(1+R_0^2)^{|l|}\int_{||x||\leq R_0}dx}, \forall 0<\delta<\delta_0.$$

Khi đó, với $0 < \delta < \delta_0$

$$\begin{aligned}
||f-\varphi_\delta*f||^2_{V^l} &= \int_{||x||\leq R_0}(1+||x||^2)^l|f(x)-(\varphi_\delta*f)(x)|^2dx\\
&\quad+\int_{||x||\geq R_0}(1+||x||^2)^l|f(x)-(\varphi_\delta*f)(x)|^2dx\\
&\leq \int_{||x||\leq R_0}(1+||x||^2)^l|\chi_{B_{R_0+1}(0)}(x)f(x)-(\varphi_\delta*(\chi_{B_{R_0+1}(0)}f))(x)|^2dx\\
&\quad+2\Big(\int_{||x||\geq R_0}(1+||x||^2)^l|f(x)|^2dx+\int_{||x||\geq R_0}(1+||x||^2)^l|(\varphi_\delta*f))(x)|^2dx\Big)\\
&\leq \frac{\epsilon^2}{2}+2(\frac{\epsilon^2}{8}+\frac{\epsilon^2}{8}) = \epsilon^2
\end{aligned}$$

do đó, dãy $\{\varphi_\delta * f\}_{\delta>0}$ hội tụ đến f trong $V^l(\mathbb{R}^n)$ khi δ giảm dần về 0.
Với $f \in W^l(\mathbb{R}^n), \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \psi(0) = 1$ thì

$$\mathcal{F}f \in V^l(\mathbb{R}^n), \mathcal{F}\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}\varphi(x)dx = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\psi)(0) = \psi(0) = 1,$$
$$\mathcal{F}(\psi^\delta f)(\xi) = ((2\pi)^{-\frac{n}{2}}((\mathcal{F}\varphi)_\delta * \mathcal{F}f)(\xi),$$

nên theo phần trên dãy $\{\mathcal{F}(\psi^\delta f)\}_{\delta>0}$ hội tụ đến $\mathcal{F}f$ trong $V^l(\mathbb{R}^n)$ khi δ giảm dần về 0, hay dãy $\{\psi^\delta f\}_{\delta>0}$ hội tụ đến f trong $W^l(\mathbb{R}^n)$ khi δ giảm dần về 0.
(iii) Do $\{0\}$ là tập compact nên có một hàm $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ và $\psi(0) = 1$. Với $f \in W^l(\mathbb{R}^n)$ thì dãy $\{(\psi^{\frac{1}{k}}f)*\rho_{\frac{1}{k}}\}_{k=1}^\infty$ (trong $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$) hội tụ đến f trong $W^l(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Nhận xét. Do $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset W^l(\mathbb{R}^n)$ nên tập $S(\mathbb{R}^n)$ trù mật trong $W^l(\mathbb{R}^n)$. Ngoài ra, $W_0^l(\mathbb{R}^n) = W^l(\mathbb{R}^n)$.

Với l là một số thực, Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$ ta có thể định nghĩa không gian $W^l(\Omega)$ là không gian con của không gian $W^l(\mathbb{R}^n)$ gồm các phần tử có giá nằm trong Ω, còn không gian $W_0^l(\Omega)$ là bao đóng của tập $C_0^\infty(\Omega)$.

Cho $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ có dãy $\{\rho_\epsilon * f\}_{\epsilon>0}$ hội tụ đến f trong $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Với $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < +\infty$, đặt $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n | \, |f(x)| \leq k, ||x|| \leq k\}$ thì với $\epsilon > 0$ tuỳ ý đều có một số $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ để

$$||f - \chi_{A_{k_0}} f||_{L^p}^p = \int_{x \notin A_{k_0}} |f(x)|^p dx \leq \int_{|f(x)|>k_0} |f(x)|^p dx + \int_{||x||>k_0} |f(x)|^p dx < \frac{\epsilon^p}{3^p}.$$

Có

$$\begin{aligned} |((\chi_{A_{k_0}} f) * \rho_\delta)(x) - (f * \rho_\delta)(x)| &= |\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(x-y)((\chi_{A_{k_0}} f)(y) - f(y))|dy \\ &\leq \Big(\int_{x \notin A_{k_0}} \rho_\delta(x-y) dy \Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_{x \notin A_{k_0}} \rho_\delta(x-y)|f(y)|^p dy \Big)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

nên $||(\chi_{A_{k_0}} f) * \rho_\delta - f * \rho_\delta||_{L^p} \leq \frac{\epsilon}{3}$.

Do $|((\chi_{A_{k_0}} f) * \rho_\delta)(x)| \leq ||f||_{L^p}$ nên với $2 < p$ có

$$|((\chi_{A_{k_0}} f) * \rho_\delta)(x) - (\chi_{A_{k_0}} f)(x)|^p \leq (||f||_{L^p} + k_0)^{p-2} |((\chi_{A_{k_0}} f) * \rho_\delta)(x) - (\chi_{A_{k_0}} f)(x)|^2.$$

Với $2 > p$ thì theo bất đẳng thức H□lder có

$$||(\chi_{A_{k_0}} f) * \rho_\delta - \chi_{A_{k_0}} f||_{L^p} \leq \Big(\int_{B_{k_0}} dx \Big)^{\frac{2-p}{p}} ||(\chi_{A_{k_0}} f) * \rho_\delta - (\chi_{A_{k_0}} f) * \rho||_{L^2}.$$

Như vậy, với $1 \leq p < +\infty$ đều có một số $C = C(k_0, f) > 0$ đê

$$||(\chi_{A_{k_0}} f) * \rho_\delta - \chi_{A_{k_0}} f||_{L^p} \leq C ||(\chi_{A_{k_0}} f) * \rho_\delta - \chi_{A_{k_0}} f||_{L^2}.$$

Do $\chi_{A_{k_0}} f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ nên tồn tại số $0 < \delta_0$ để

$$||(\chi_{A_{k_0}} f) * \rho_\delta - \chi_{A_{k_0}} f||_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{3C}$$

Khi đó, với $0 < \delta < \delta_0$ có

$$\begin{aligned} ||f - f * \rho_\delta||_{L^p} &\leq ||f - \chi_{A_{k_0}} f||_{L^p} + ||(\chi_{A_{k_0}} f) * \rho_\delta - \chi_{A_{k_0}} f||_{L^p} \\ &+ ||(\chi_{A_{k_0}} f) * \rho_\delta - f * \rho_\delta||_{L^p} \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + C||(\chi_{A_{k_0}} f) * \rho_\delta - \chi_{A_{k_0}} f||_{L^2} + \frac{\epsilon}{3} \leq \epsilon \end{aligned}$$

hay dãy $\{f * \rho_\delta\}_{\delta>0}$ hội tụ đến f trong $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Định lý 3.8 (Đối ngẫu của không gian Sobolev). *(i)Với mỗi $l \in \mathbb{R}$, đối ngẫu của không gian $V^l(\mathbb{R}^n)$ là*

$$\big(V^l(\mathbb{R}^n)\big)' \cong V^{-l}(\mathbb{R}^n),$$

nghĩa là, với mỗi $f \in \big(V^l(\mathbb{R}^n)\big)'$ đều có duy nhất một phần tử v trong $V^{-l}(\mathbb{R}^n)$ sao cho

- $f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx, \forall u \in V^l(\mathbb{R}^n)$,
- $||f||_{(V^l)'} = ||v||_{V^{-l}}$,

và mỗi phần tử $v \in V^{-l}(\mathbb{R}^n)$ thì phiếm hàm biến $u \in V^l(\mathbb{R}^n)$ thành $\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục từ $V^l(\mathbb{R}^n)$ vào $\mathbb{C}$.
(ii)Với mỗi $l \in \mathbb{R}$, đối ngẫu của không gian $W^l(\mathbb{R}^n)$ là

$$\big(W^l(\mathbb{R}^n)\big)' \cong W^{-l}(\mathbb{R}^n),$$

nghĩa là, với mỗi $f \in \big(W^l(\mathbb{R}^n)\big)'$ đều có duy nhất một phần tử v trong $W^{-l}(\mathbb{R}^n)$ sao cho

- $f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx, \forall u \in W^l(\mathbb{R}^n)$,
- $||f||_{(W^l)'} = ||v||_{W^{-l}}$,

và mỗi phần tử $v \in W^{-l}(\mathbb{R}^n)$ thì phiếm hàm biến $u \in W^l(\mathbb{R}^n)$ thành $\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục từ $W^l(\mathbb{R}^n)$ vào $\mathbb{C}$.

Chú ý. Với $l \in \mathbb{R}, \Omega \overset{\text{mở}}{\subset} \mathbb{R}^n$, không gian đối ngẫu của $W^l(\Omega), W_0^l(\Omega)$ là

$$\big(W^l(\Omega)\big)' = \big(W_0^l(\Omega)\big)' = W^{-l}(\Omega).$$

Chứng minh. (i) Với mỗi $v \in V^{-l}(\mathbb{R}^n)$ từ bất đẳng thức Cauchy- Schwartz

$$|\int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx| \le \Big(\int_{\mathbb{R}^n}(1+||x||^2)^l|u(x)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big((1+||x||^2)^{-l}|v(x)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}, \forall u \in V^l(\mathbb{R}^n),$$

với dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $u(x) = c(1+||x||^2)^{-l}\overline{v(x)}$, với $c \in \mathbb{C}$ là hằng số, nên phiếm hàm biến $u \in V^l(\mathbb{R}^n)$ thành $\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục từ $V^l(\mathbb{R}^n)$ vào $\mathbb{C}$, với chuẩn bằng $||v||_{V^{-l}}$.
Lấy $f \in \big(V^l(\mathbb{R}^n)\big)'$. Nếu $f = 0$ thì có duy nhất $v = 0 \in V^{-l}(\mathbb{R}^n)$ để

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx = 0, \forall u \in V^l(\mathbb{R}^n).$$

Nếu $f \neq 0$, nghĩa là $||f||_{(V^l)'} \neq 0$. Khi đó, có một dãy $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ trong $V^l(\mathbb{R}^n)$ mà

$$||u_k||_{V^l} = 1, k = 1, 2, \dots, \text{ và } \lim_{k\to\infty} f(u_k) = ||f||_{(V^l)'}.$$

Ta có thể giả sử $||u_k||_{V^l} \leq \frac{1}{2}, k = 1, 2, \ldots$. Nếu dãy $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ không là dãy Cauchy trong $V^l(\mathbb{R}^n)$ thì có một số $\epsilon \in (0,1)$ và một dãy con của nó, đơn giản ký hiệu ta có thể giả sử $||v_k - v_j||_{V^l} \geq 2\epsilon_0, k \neq j$. Nên $||v_k + v_j||_{V^l} = (||v_k||_{V^l} + ||v_j||_{V^l}) - ||v_k - v_j||_{V^l} \leq 2 - 2\epsilon_0$ Do đó

$$
\begin{aligned}
||f||_{(V^l)'} &\geq |f(\frac{1}{||u_j + u_k||_{V^l}}(u_j + u_k))| = ||\frac{u_j + u_k}{2}||_{V^l} f(\frac{u_j + u_k}{2}) \\
&\geq \frac{1}{1-\epsilon_0}\frac{1}{2}(f(u_j) + f(u_k))
\end{aligned}
$$

hay $(f(u_j) + f(u_k)) \leq 2(1-\epsilon_0)||f||_{(V^l)'}$. Điều này không thể xảy ra khi j, k đủ lớn. Do vậy, dãy $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $V^l(\mathbb{R}^n)$, mà $V^l(\mathbb{R}^n)$ là đầy đủ, nên tồn tại $u_0 \in V^l(\mathbb{R}^n)$ để $\lim\limits_{k\to\infty} ||u_k - u_0||_{V^l} = 0$, do đó $||u_0||_{V^l} = 1, f(u_0) = ||f||_{(V^l)'}$.
Nếu có một $u_0' \in V^l(\mathbb{R}^n)$ mà $||u_0'||_{V^l} = 1, f(u_0') = ||f||_{(V^{-l})'}$. Khi đó, có

$$
\begin{aligned}
0 < ||f||_{(V^l)'} = f(\frac{u_0' + u_0}{2}) &\leq ||\frac{u_0' + u_0}{2}||_{V^l}||f||_{(V^{-l})'} \\
&\leq (1 - ||\frac{u_0' - u_0}{2}||_{V^l})||f||_{(V^{-l})'}
\end{aligned}
$$

do đó, $||\frac{u_0' - u_0}{2}||_{V^l} = 0$ hay chỉ có duy nhất một phần tử $u_0 \in V^l(\mathbb{R}^n)$ để

$$||u_0||_{V^l} = 1, f(u_0) = ||f||_{(V^{-l})'}.$$

Khi đó, ta đặt $v(x) = ||f||_{(V^l)'}(1 + ||x||^2)^l \overline{u_0(x)}$, có

$$
\begin{aligned}
v \in V^{-l}(\mathbb{R}^n), ||v||_{V^{-l}} &= ||f||_{(V^l)'} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^l |\overline{u_0(x)}|^2 dx = ||f||_{(V^l)'} \\
\int_{\mathbb{R}^n} v(x)u_0(x)dx &= ||f||_{(V^l)'} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^l u_0(x)\overline{u_0(x)}dx = f(u_0).
\end{aligned}
$$

Như vậy, v xác định trên $V^l(\mathbb{R}^n)$ một phiếm hàm tuyến tính liên tục với chuẩn $||v||_{V^{-l}} = ||f||_{(V^l)'}$. Giả sử có một hàm $u \in V^l(\mathbb{R}^n)$ mà

$$f(u) \neq \int_{\mathbb{R}^n} v(x)u(x)dx.$$

Ta có thể giả sử $f(u) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)u(x)dx = 2||f||_{(V^l)'}$. Bằng cách tổ hợp tuyến tính với u_0 ta có thể giả sử

$$f(u) = ||f||_{(V^l)'}, \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)u(x)dx = -||f||_{(V^l)'}(\text{ vì } f(u_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)u_0(x)dx = ||f||_{(V^l)'}).$$

Khi đó, với $t > 0$ có

- $f(u_0 + tu) = ||f||_{(V^l)'}(1 + t)$ nên $||u_0 + tu||_{V^l} \geq (1 + t)$,

- $\int_{\mathbb{R}^n} v(x)(u_0(x) - tu(x))dx = ||v||_{V^{-l}}(1-t)$ nên $||u_0 + tu||_{V^l} \geq (1+t)$,

mà $||\frac{(u_0+tu)+(u_0-tu)}{2}||_{V^l} + ||\frac{(u_0+tu)-(u_0-tu)}{2}||_{V^l} = ||\frac{u_0+tu}{2}||_{V^l} + ||\frac{u_0-tu}{2}||_{V^l}$
nên $1+t^2||u||^2_{V^l} \geq (1+t)^2$ hay $0 \geq t((1-||u||^2_{V^l})t-2)$. Điều này xảy ra với mọi $t>0$ nên $||u||_{V^l} = 1$ mà $f(u) = ||f||_{V^{-l}}$ do đó $u = u_0$. Khi đó, $f(u) = f(u_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)u_0(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)u_0(x)dx$, nên ta có điều mâu thuẫn. Do đó, $f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x)u(x)dx, \forall u \in V^l(\mathbb{R}^n)$.
Như vậy, với mỗi $f \in \big(V^l(\mathbb{R}^n)\big)'$ đều có duy nhất một phần tử v trong $V^{-l}(\mathbb{R}^n)$ sao cho

- $f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx, \forall u \in V^l(\mathbb{R}^n)$,
- $||f||_{(V^l)'} = ||v||_{V^{-l}}$.

(ii)Với mỗi $v \in W^{-l}(\mathbb{R}^n)$ từ bất đẳng thức Cauchy- Schwartz

$$|\int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx| = |\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}u)(\xi)(\mathcal{F}^{-1}v)(\xi)d\xi| \leq$$
$$\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (1+||\xi||^2)^l|\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\Big((1+||\xi||^2)^{-l}|\mathcal{F}v(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}, \forall u \in W^l(\mathbb{R}^n)$$

có dấu bằng khi và vhỉ khi $u(x) = c\mathcal{F}^{-1}((1+||\xi||^2)^{-l}\mathcal{F}\overline{v})(x), c \in \mathbb{C}$ là hằng số, nên phiếm hàm biến $u \in W^l(\mathbb{R}^n)$ thành $\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục từ $W^l(\mathbb{R}^n)$ vào $\mathbb{C}$, với chuẩn $||v||_{W^{-l}}$.
Do phép nhúng $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^l(\mathbb{R}^n)$ là liên tục nên mỗi phần tử $f \in \big(W^l(\mathbb{R}^n)\big)'$ có thể coi là một hàm suy rộng tăng chậm. Khi đó, với mỗi $u \in S(\mathbb{R}^n)$ có

$$\begin{aligned} f(u) &= \langle f, u\rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}u\rangle \\ &= \langle \mathcal{F}^{-1}f, \mathcal{F}u\rangle, \end{aligned}$$

mà $|\langle \mathcal{F}^{-1}f, \mathcal{F}u\rangle| = |f(u)| \leq ||f||_{(W^l)'}||u||_{W^l} = ||f||_{(W^l)'}||\mathcal{F}u||_{V^l}$
nên $\mathcal{F}^{-1}f$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục từ không gian $S(\mathbb{R}^n)$ với tôpô sinh bởi chuẩn $||.||_{V^l}$ vào $\mathbb{C}$.
Lại có $S(\mathbb{R}^n)$ là tập trù mật trong $V^l(\mathbb{R}^n)$ nên ta có thể thác triển $\mathcal{F}^{-1}f$ lên thành một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $V^l(\mathbb{R}^n)$ hay ta có thể coi $\mathcal{F}f$ là một phần tử của không gian đối ngẫu $\big(V^l(\mathbb{R}^n)\big)'$. Nên theo phần trên có một phần tử g trong $V^{-l}(\mathbb{R}^n)$ sao cho

- $\mathcal{F}^{-1}f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)g(x)dx, \forall u \in V^l(\mathbb{R}^n)$,
- $||\mathcal{F}^{-1}f||_{(V^l)'} = ||g||_{V^{-l}}$.

Khi đó, nếu đặt $v = \mathcal{F}g \in W^{-l}(\mathbb{R}^n)$ thì

- $f(u) = \langle \mathcal{F}^{-1}f, \mathcal{F}u\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}u(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx, \forall u \in W^l(\mathbb{R}^n)$,
- $||f||_{W^{-l}} = ||\mathcal{F}^{-1}f||_{(V^l)'} = ||g||_{V^{-l}} = ||v||_{W_{-l}}$.

Nếu có một phần tử $v' \in W^{-l}(\mathbb{R}^n)$ để

- $f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx, \forall u \in W^l(\mathbb{R}^n)$,
- $||f||_{W^{-l}} = ||v||_{W_{-l}}$,

thì với $g' = \mathcal{F}^{-1}v' \in V^{-l}(\mathbb{R}^n)$ có

- $\mathcal{F}^{-1}f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)g'(x)dx, \forall u \in V^l(\mathbb{R}^n)$,
- $||\mathcal{F}^{-1}f||_{(V^l)'} = ||g'||_{V^{-l}}$,

nên theo phần (i) có $g' = g$ hay $v' = v$ nghĩa là mỗi $f \in \big(W^l(\mathbb{R}^n)\big)'$ đều có duy nhất một phần tử v trong $W^{-l}(\mathbb{R}^n)$ sao cho

- $f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx, \forall u \in W^l(\mathbb{R}^n)$,
- $||f||_{(W^l)'} = ||v||_{W^{-l}}$.

$\square$

Định lý 3.9 (Định lý vết). *Với $l > \frac{1}{2}$, ánh xạ vết γ biến $u(x', x_n)$ thành $\gamma u = u(x', 0)$ là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ không gian $S(\mathbb{R}^n)$ với tôpô sinh bởi chuẩn $||.||_{W^l}$ vào không gian $S(\mathbb{R}^{n-1})$ với tôpô sinh bởi chuẩn $||.||_{W^{l-\frac{1}{2}}}$.*
Khi đó, ánh xạ này có thể thác triển lên thành một ánh xạ tuyến tính liên tục từ $W^l(\mathbb{R}^n)$ vào $W^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$.

Chứng minh. Dễ có, từ định nghĩa, ánh xạ vết γ biến $u(x', x_n)$ thành $u(x', 0)$ là ánh xạ từ $S(\mathbb{R}^n)$ vào $S(\mathbb{R}^{n-1})$.
Do tập $S(\mathbb{R}^n)$ trù mật trong $W^l(\mathbb{R}^n)$ nên ta chỉ còn phải chứng minh bất đẳng thức sau

$$||u(.,0)||_{W^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \le C||u(.)||_{W^l(\mathbb{R}^n)}, \forall u \in S(\mathbb{R}^n),$$

trong đó, C là một hằng số dương.
Thật vậy, với $u \in S(\mathbb{R}^n)$ có

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{n-1}[u(x',0)](\xi',0) &= \mathcal{F}_{n-1}[\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}u)(x',0)](\xi',0) \\
&= (2\pi)^{-n-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\langle x',\xi'\rangle} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x',\eta'\rangle} \mathcal{F}u(\eta) d\eta dx' \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}u(\xi',\eta_n) d\eta_n \text{ (Định lý Fubini)}
\end{aligned}$$

mà với $l > \frac{1}{2}$, bằng cách đặt $t = \frac{\eta_n}{(1+||\xi'||^2)^{\frac{1}{2}}}$ có

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + ||\xi'||^2 + |\eta_n|^2)^{-l} d\eta_n = 2(1 + ||\xi'||^2)^{-l+\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} (1 + t^2)^{-l} dt < +\infty,$$

nên theo định lý Cauchy- Schwartz có

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}_{n-1}[u(x',0)](\xi',0)| \leq &(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}}(1+||\xi'||^2+|\eta_n|^n)^l|\mathcal{F}u(\xi',\eta_n)|d\eta_n\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\times\Big(\int_{\mathbb{R}}(1+||\xi'||^2+|\eta_n|^n)^{-l}d\eta_n\Big)^{\frac{1}{2}}\\ \leq&(2\pi)^{-\frac{1}{2}}2(1+||\xi'||^2)^{\frac{-2l+1}{4}}\Big(\int_0^{+\infty}(1+t^2)^{-l}dt\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\times\Big(\int_{\mathbb{R}}(1+||\xi'||^2+|\eta_n|^n)^l|\mathcal{F}u(\xi',\eta_n)|d\eta_n\Big)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

do đó $(1+||\xi'||^2)^{l-\frac{1}{2}}|\mathcal{F}_{n-1}[u(x',0)](\xi',0)|^2 \leq C\int_{\mathbb{R}}(1+||\xi'||^2+|\eta_n|^n)^l|\mathcal{F}u(\xi',\eta_n)|d\eta_n$, tích phân cả hai vế theo ξ' trên $\mathbb{R}^{n-1}$ có

$$||u(.,0)||_{W^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C||u(.)||_{W^l(\mathbb{R}^n)},$$

với $C = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}\big(\int_0^{+\infty}(1+t^2)^{-l}dt\big)^{\frac{1}{2}}$. □

3.2 Không gian Sobolev trên nửa không gian

Trong phần này, ta sẽ xây dựng không gian Sobolev trên nửa không gian $\bar{\mathbb{R}}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n |\ x_n \geq 0\}$ (là tập đóng trong $\mathbb{R}^n$).

Định nghĩa 3.3. Với $l \geq 0$, không gian $W^l(\bar{\mathbb{R}^n_+})$ là không gian tất cả các hàm $u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ mà có một hàm $\tilde{u} \in W^l(\mathbb{R}^n)$, sao cho $\tilde{u}|_{\bar{\mathbb{R}^n_+}} = u$. Khi đó, chuẩn của hàm u được xác định như sau

$$||u||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)} = \inf ||\tilde{u}||_{W^l(\mathbb{R}^n)},$$

trong đó, infimum lấy trên tất cả các hàm $\tilde{u} \in W^l(\mathbb{R}^n)$ mà $\tilde{u}|_{\bar{\mathbb{R}^n_+}} = u$.
Không gian $W^l_0(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ là bao đóng của tập $C^\infty_0(\mathbb{R}^n_+)$ trong $W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$.

Chú ý. Phiếm hàm $||.||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)}$ thực sự là một chuẩn trong $W^l(\bar{\mathbb{R}^n_+})$, vì

- (xác định dương) $||u||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)} \geq 0, \forall u \in W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ và $||u||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)} = 0$ khi và chỉ khi $\tilde{u} = 0$ hay $u = 0$,
- (thuần nhất) $||\lambda u||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)} = |\lambda|\, ||u||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)}, \forall u \in W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+), \forall \lambda \in \mathbb{C}$,
- (bất đẳng thức tam giác) $||u+v||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)} \leq ||u||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)} + ||v||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)}, \forall u, v \in W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$.

Khi $l = 0$ thì $W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+) = W^l_0(\bar{\mathbb{R}}^n_+) = L^2(\mathbb{R}^n_+)$.
Với $k \geq l \geq 0$ ta có các phép nhúng liên tục $W^k(\bar{\mathbb{R}}^n_+) \hookrightarrow W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n_+)$.
Với $l \geq 0$,từ Định nghĩa, ánh xạ thu hẹp $u|_{\mathbb{R}^n} \mapsto u|_{\bar{\mathbb{R}^n_+}}$ là ánh xạ tuyến tính liên tục từ $W^l(\mathbb{R}^n)$ vào $W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$. Mà hạt nhân của ánh xạ thu hẹp này là $W^l(\mathbb{R}^n_-)$ là không gian con đóng của không gian $W^l(\mathbb{R}^n)$ nên không gian $W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ đẳng cấu với không gian thương $\frac{W^l(\mathbb{R}^n)}{W^l(\mathbb{R}^n_-)}$.
Nếu ta ký hiệu $S(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ là tập các hàm $u : \bar{\mathbb{R}}^n_+ \to \mathbb{C}$ mà nó có một thác triển $v \in S(\mathbb{R}^n)$, hay nói cách khác có một hàm $v \in S(\mathbb{R}^n)$ mà thu hẹp của v trên $\bar{\mathbb{R}}^n_+$ là u. Khi đó, do $S(\mathbb{R}^n)$ trù mật trong $W^l(\mathbb{R}^n)$ nên $S(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ trù mật trong $W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$.
Với $l \in \mathbb{Z}_+, u \in C^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$, thác triển $\tilde{u}$ của u lên $\mathbb{R}^n$ được xác định như sau

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{nếu } x_n \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, -jx_n) & \text{nếu } x_n \leq 0, \end{cases}$$

với $\lambda_j, j = 1, 2, \ldots, l+1$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình

$$\sum_{j=1}^{l+1} (-j)^k \lambda_j = 1, k = 1, 2, \ldots, l+1,$$

là một hàm khả vi liên tục đến cấp l trong $\mathbb{R}^n$ và với $|\alpha| \leq l$ có

$$D^\alpha \tilde{u}(x) = \begin{cases} D^\alpha u(x) & \text{nếu } x_n \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{k+1} (-j)^{\alpha_n} \lambda_j D^\alpha u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, -jx_n) & \text{nếu } x_n \leq 0, \end{cases}$$

nếu $\operatorname{supp} u \subset B_R(0)$ thì $\operatorname{supp} \tilde{u} \subset B_{(l+1)R}(0)$,
và nếu $u \in W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ thì $\tilde{u} \in W^l(\mathbb{R}^n), ||\tilde{u}||_{W^l(\mathbb{R}^n)} \leq C||u||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)}$, với C là hằng số không phụ thuộc u. Như vậy, có một ánh xạ thác triển tuyến tính liên tục từ $W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ lên $W^l(\mathbb{R}^n)$.
Với $l \in \mathbb{Z}_+$, trên $W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ có các chuẩn tương đương với chuẩn $||.||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)}$

$$
{}_1||u||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq l} \int_{\mathbb{R}^n_+} |D^\alpha u(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}},
$$

$$
{}_2||u||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)} = \Big(\sum_{j=1}^{l} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{+\infty} (1 + ||\xi'||^2)^{l-j} |D_n^j \mathcal{F}_{n-1} u(\xi', x_n)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}.
$$

Với $l \geq 0$, dùng phép nội suy ta cũng sẽ có một ánh xạ tuyến tính liên tục biến mỗi $u \in W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ thành một thác triển của u là một hàm $\tilde{u} \in W^l(\mathbb{R}^n)$.

Định lý 3.10 (Định lý nhúng). *Với $0 \leq l \leq k$, K là một tập compact trong $\bar{\mathbb{R}}^n_+$ có phép nhúng từ không gian con của $W^k(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ gồm các phần tử có giá $\operatorname{supp} u \subset K$, vào $W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ là compact.*

Chứng minh. Lấy một dãy $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ bị chặn bởi $C > 0$, trong $W^k(\bar{\mathbb{R}}^n_+), \operatorname{supp} u_j \subset K$. Từ Chú ý trên, với mỗi u_j đều có một hàm $\tilde{u} \in W^k(\mathbb{R}^n)$ mà $\tilde{u_j}|_{\bar{\mathbb{R}}^n_+} = u_j$ và $||u_j||_{W^k(\mathbb{R}^n)} \leq C', \operatorname{supp} \tilde{u_j} \subset K'$, $C' > 0, K'$ là tập compact không phụ thuộc j. Từ Định lý nhúng trong không gian $W^k(\mathbb{R}^n)$, dãy $\{\tilde{u}_j\}_{j=1}^\infty$ có dãy con hội tụ trong $W^l(\mathbb{R}^n)$. Lại tiếp tục, do ánh xạ thu hẹp là ánh xạ tuyến tính liên tục từ $W^l(\mathbb{R}^n)$ vào $W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ nên dãy $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ có dãy con hội tụ trong $W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$. □

Định lý 3.11 (Định lý vết). *Với $l \leq \frac{1}{2}$, ánh xạ vết γ biến $u(x', x_n)$ thành $u(x', 0)$ là ánh xạ tuyến tính liên tục từ không gian $S(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ với tôpô sinh bởi chuẩn$||.||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)}$ vào không gian $S(\mathbb{R}^{n-1})$ với tôpô sinh bởi chuẩn $||.||_{W^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$.*
Ánh xạ vết γ có thể thác triển lên thành ánh xạ tuyến tính liên tục từ không gian $W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ vào không gian $W^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Chứng minh. Dễ thấy ánh xạ vết γ biến $u(x', x_n)$ thành $u(x', 0)$ là ánh xạ tuyến tính từ không gian $S(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ vào không gian $S(\mathbb{R}^{n-1})$.
Do $S(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ trù mật trong $W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$, $S(\mathbb{R}^{n-1})$ trù mật trong $W^l(\mathbb{R}^{n-1})$ nên để chứng minh Định lý ta chỉ còn phải chứng minh có một số $C > 0$ để

$$
||u(.,0)||_{W^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C||u||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)}, \forall u \in S(\bar{\mathbb{R}}^n_+). \tag{3.6}
$$

Với $u \in S(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ tồn tại $v \in S(\mathbb{R}^n)$ mà $v|_{\bar{\mathbb{R}}^n_+} = u \in C^{[l]+1}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$. Theo Chú ý trên có một hàm $\tilde{u} \in C^{[l]+1}(\mathbb{R}^n)$ mà $\tilde{u}|_{\bar{\mathbb{R}}^n_+} = u$ và $||\tilde{u}||_{W^l(\mathbb{R}^n)} \leq C_1||u||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)} \leq C_1||\tilde{u}||_{W^l(\mathbb{R}^n)}$ ($C_1 > 1$ là hằng số không phụ thuộc u). Khi đó, $\tilde{u}(x', 0) = \tilde{u}|_{\bar{\mathbb{R}}^n_+}(x', 0) = u(x', 0)$, nên theo Định lý vết trong $W^l(\mathbb{R}^n)$ có

$$
||u(.,0)||_{W^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} = ||\tilde{u}(x',0)||_{W^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C_2||\tilde{u}||_{W^l(\mathbb{R}^n)} \leq C||u||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)}.
$$

□

Chú ý. Để chứng minh bất đẳng thức (3.6) với $u \in S(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ ta có thể chứng minh như sau. Với $u \in S(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ có $D^j_n \mathcal{F}_{n-1} u(\xi', t) \in S(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ nên $\lim\limits_{t \to +\infty} |D^j_n \mathcal{F}_{n-1} u(\xi', t)| = 0$. Do đó,

$$
\begin{aligned}
|D^j_n \mathcal{F}_{n-1} u(\xi', 0)|^2 &= \int_0^{+\infty} d|D^j_n \mathcal{F}_{n-1} u(\xi', \tau)|^2 \\
&= -2\Re \int_0^{+\infty} D^{j+1}_n \mathcal{F}_{n-1} u(\xi', \tau) \overline{D^j_n \mathcal{F}_{n-1} u(\xi', \tau)} d\tau \leq
\end{aligned}
$$

$$
\leq (1 + ||\xi'||^2)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} |D^{j+1}_n \mathcal{F}_{n-1} u(\xi', \tau)|^2 d\tau + (1 + ||\xi'||^2)^{\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} |D^j_n \mathcal{F}_{n-1} u(\xi', \tau)|^2 d\tau
$$

nên

$$
\begin{aligned}
(1 + ||\xi'||^2)^{l-j-\frac{1}{2}} |D^j_n \mathcal{F}_{n-1} u(\xi', 0)|^2 \leq & (1 + ||\xi'||^2)^{l-j-1} \int_0^{+\infty} |D^{j+1}_n \mathcal{F}_{n-1} u(\xi', \tau)|^2 d\tau \\
& (1 + ||\xi'||^2)^{l-j} \int_t^{+\infty} |D^{j+1}_n \mathcal{F}_{n-1} u(\xi', \tau)|^2 d\tau
\end{aligned}
$$

hay $||D^j_n u(.,0)||_{W^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C({}_2||u||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)}), \forall j = 0, 1, \ldots, l-1$. Với $j = 0$, và chú ý chuẩn ${}_2||.||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)}$ tương đương với chuẩn $||.||_{W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)}$, ta có bất đẳng thức (3.6).

Định lý 3.12 (Đối ngẫu của không gian $W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$). *Với $l \leq 0$, không gian đối ngẫu của không gian $W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ là*

$$
\big(W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)\big)' = W^{-l}(\mathbb{R}^n_+)
$$

nghĩa là, với mỗi $f \in \big(W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)\big)'$ có duy nhất một phần tử $v \in W^{-l}(\mathbb{R}^n_+)$ sao cho

- $f(u) = \int_{\mathbb{R}^n_+} u(x)v(x)dx, \forall u \in W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$,
- $||f||_{\left(W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)\right)'} = ||v||_{W^{-l}(\mathbb{R}^n_+)}$.

Chứng minh. Với $f \in \big(W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)\big)', u \in W^l(\mathbb{R}^n)$ đặt $\tilde{f}(u) = f(u|_{\bar{\mathbb{R}}^n_+})$, dễ có $\tilde{f} \in \big(W^l(\mathbb{R}^n)\big)'$ và $||\tilde{f}||_{\left(W^l(\mathbb{R}^n)\right)'} = ||f||_{\left(W^l(\bar{\mathbb{R}}^n_+)\right)'}$. Theo Định lý về đối ngẫu cho không gian $W^l(\mathbb{R}^n)$, có duy nhất một hàm $v \in W^{-l}(\mathbb{R}^n)$ mà

- $\tilde{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} u(x)v(x)dx, \forall u \in W^l(\mathbb{R}^n)$,
- $||\tilde{f}||_{\left(W^l(\mathbb{R}^n)\right)'} = ||v||_{W^{-l}(\mathbb{R}^n)}$.

Mà với $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp} \varphi \cap \bar{\mathbb{R}}^n_+ = \emptyset$ có

$$
\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\varphi(x)dx = \tilde{f}(\varphi) = f(\varphi|_{\bar{\mathbb{R}}^n_+}) = 0
$$

nên $\operatorname{supp} v \subset \mathbb{R}^n_+$ hay $v \in W^{-l}(\mathbb{R}^n_+)$ và $||v||_{W^{-l}(\mathbb{R}^n_+)} = ||v||_{W^{-l}(\mathbb{R}^n)}$. $\square$

3.3 Một số bất đẳng thức trong không gian Sobolev

Định lý 3.13 (Bất đẳng thức Sobolev). *Cho* $n \geq 3, f \in W^1(\mathbb{R}^n)$*. Khi đó,* $f \in L^q(\mathbb{R}^n), q = \frac{2n}{n-2}$*, và ta có đánh giá sau*

$$||f||_{L^q} \leq C||\nabla f||_{L^2},$$

trong đó, C *là một hằng số dương không phụ thuộc vào* f*.*

Chứng minh. Với nghiệm cơ bản $E(x) = \dfrac{1}{(n-1)c_{n-1}||x-y||^{2-n}}$, c_{n-1} là diện tích mặt cầu S^{n-1} của toán tử Laplace $\Delta E = \delta$. Khi đó, với $g \in L^p(\mathbb{R}^n), p = \frac{2n}{n+2}$ có $\Delta(E * g) = g$. Khi đó, $\mathcal{F}(E * g)(\xi) = ||\xi||^{-2}\mathcal{F}g(\xi)$ nên

$$\int_{\mathbb{R}^n} ||\xi||^{-2}|\mathcal{F}g(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(E * g)(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (E * g)(x)\overline{g(x)}dx.$$

Với $f \in W^1(\mathbb{R}^n)$ có

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}^{-1}\overline{g}(\xi)d\xi$$

nên theo bất đẳng thức Cauchy- Schwartz có

$$\begin{aligned}
|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx| &\leq \Big(||\xi||^2|\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(||\xi||^{-2}|\mathcal{F}g(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(||\xi||^2|\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} (E * g)(x)\overline{g(x)}dx\Big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

mà $||f||_{L^q} = \sup\limits_{||g||_{L^p}=1} |\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx|$

và theo bất đẳng thức Hardy- Littlewood- Sobolev có $\int_{\mathbb{R}^n} (E * g)(x)\overline{g(x)}dx \leq C||g||_{L^p}$

nên $||f||_{L^q} \leq C\Big(||\xi||^2|\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \leq C||\nabla f||_{L^2}$. □

Định lý 3.14 (Bất đẳng thức Poincare). *Cho* $f \in W_0^1(\Omega)$*, với* Ω *là tập mở, bị chặn, biên trơn. Khi đó, có một số dương* C *không phụ thuộc* f *sao cho*

$$||f||_{L^2} \leq C||\nabla f||_{L^2}.$$

Định lý 3.15 (Bất đẳng thức Hardy). *Cho* $f \in W^1(\mathbb{R}^n)$*. Khi đó, có một số dương* C *không phụ thuộc* f *sao cho*

$$||\frac{1}{||x||}f||_{L^2} \leq C||\nabla f||_{L^2}.$$

Tài liệu tham khảo

[1] Adams, R. A., *Sobolev spaces,* Academic Press, New York, 1975.

[2] Gel'fand, I. M., Shilov, G. E., *Generalized functions I,* Academic Press, New York, 1964.

[3] Hormander, L., *The analysis of Linear Partial Differential Operators I, II,* Springer-Verlag, 1985.

[4] Schwartz, L., *Theorie des distributions,* Hermann, Paris, 1966.

[5] Vladimirov, V. S., *Equations of Mathematics Physics,* Mir Publishers, Moscow, 1984.